Fitriani, S.Pd., M.Pd, Irmayanti, S.Pd., M.Pd,
Nurjannah, S.Pd., M.Pd., Sudarmin,ST.M.Eng

KALKULUS INTEGRAL

KALKULUS INTEGRAL

Fitriani, S.Pd., M.Pd, Irmayanti, S.Pd., M.Pd,
Nurjannah, S.Pd., M.Pd., Sudarmin,ST.M.Eng

penapersada

KALKULUS INTEGRAL

ISBN 978-623-167-417-3
9 786231 674173

pena persada

KALKULUS INTEGRAL

Fitriani, S.Pd., M.Pd
Irmayanti, S.Pd., M.Pd,
Nurjannah, S.Pd., M.Pd
Sudarmin,ST.M.Eng

PT. PENA PERSADA KERTA UTAMA

KALKULUS INTEGRAL

Penulis:

Fitriani, S.Pd., M.Pd

Irmayanti, S.Pd., M.Pd,

Nurjannah, S.Pd., M.Pd

Sudarmin,ST.M.Eng

Editor:

Nurazizah Rahmah

St. Nurul Mutmainna

ISBN: 978-623-167-417-3

Design Cover:

Yanu Fariska Dewi

Layout:

Hasnah Aulia

PT. Pena Persada Kerta Utama

Redaksi:

Jl. Gerilya No. 292 Purwokerto Selatan, Kab. Banyumas

Jawa Tengah.

Email: penerbit.penapersada@gmail.com

Website: penapersada.id. Phone: (0281) 7771388

Anggota IKAPI: 178/JTE/2019

Cetakan pertama: 2024

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, atas berkat Rahmat dari Allah SWT penulis dapat menyelesaikan buku yang berjudul “KALKULUS INTEGRAL” ini. Pada buku ini membahas Integral Tentu, Integral Tak Tentu, Fungsi Transender, dan Teknik Integrasi.

Penulis mengucapkan ribuan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu sehingga terselesaikannya penulisan buku ini. Penulis juga berharap buku ini dapat bermanfaat bagi mahasiswa. Saran dan kritik dari pembaca sangat diharapkan demi perbaikan dan pengembangan buku ini secara berkelanjutan.

DAFTAR ISI

KALKULUS INTEGRAL

BAB 1
INTEGRAL TAK TENTU

A. Pengertian Integral Tak Tentu

Definisi

Kita sebut F suatu anti turunan dari f pada selang I jika DF = f pada I – yakni, jika F' (x) = f(x) untuk semua x dalam I. (jika x suatu titik ujung dari I, F'(x) hanya perlu berupa turunan satu sisi)

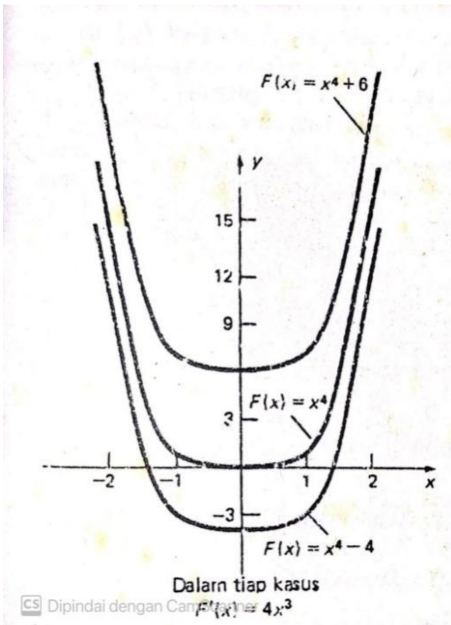
Contoh 1.1

Carilah suatu anti turunan dari fungsi

$f(x) = 4x^3$ pada $(-\infty, \infty)$.

Penyelesaian

Kita mencari suatu fungsi F yang memenuhi F' (x) = $4x^3$ untuk semua x riil. Dari pengalaman kita dengan pendiferensialkan kita memnuhi bahwa $F(x) = x^4$ adalah satu fungsi yang demikian



Gambar 1. 1 Grafik fungsi

Pemikiran sejenak akan mengemukakan penyelesaian lain untuk contoh 1. Fungsi $F(x) = x^4 + 6$ juga memenuhi $F'(x) = 4x^3$; ini juga adalah suatu anti turunan dari $f(x) = 4x^3$. Pada kenyataannya, $F(x) = x^4 + C$ dengan C kostanta sebarang, adalah suatu anti turunan dari $4x^3$ pada $(-\infty, \infty)$. (lihat gambar 1.1)

Sekarang kita dihadapkan pada pertanyaan penting. Apakah setiap anti turunan $f(x) = 4x^3$ berbentuk $F(x) = x^4 + C$? jawabnya adalah yakni menurut teorema 4.8.B, yang mengatakan bahwa dua fungsi dengan turunan sama hanya berbeda dalam konstanta.

Kesimpulan kita adalah ini. Jika suatu fungsi f mempunyai suatu anti turunan, ia akan mempunyai keseluruhan family dan setiap anggota dapat diperoleh dari salah satu diantara mereka dengan jalan menambahkan suatu kostanta yang cocok. Family fungsi ini kita namakan anti turunan umum dari f.

Contoh 1.2

Carilah anti turunan umum dari $f(x) = x^2$ pada $(-\infty, \infty)$.

Penyelesaian fungsi $f(x) = x^3$ tidak akan berhasil karena turunannya adalah $3x^2$. Tetapi itu menyarankan $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, yang memenuhi $F'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$. Karenanya, anti turunan umum adalah $\frac{1}{3}x^3 + C$.

Teorema A

(aturan pangkat). Jika r adalah sebarang bilangan rasional kecuali -1, maka

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$$

Bukti, untuk mengembangkan suatu hasil berbentuk

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Adalah cukup dengan membuktikan

$$D_x[F(x) + C] = f(x)$$

Dalam kasus kita,

$$D_x\left[\frac{x^{r+1}}{r+1} + C\right] = \frac{1}{r+1}(r+1)x^r = x^r$$

Kita akan membuat dua komentar mengenail teorema A. pertama, di $\int 1 \, dx = x + C$ k mengcakup kasus $r = 0,$ yakni,

Kedua, karena selang I tidak dirinci, maka kesimpulan sahih untuk sebarang selang pada mana x^r terdefinisi. Secara khusus, kita harus mengecualikan selang yang mengandung titik asal jika $r < 0.$ Pengertian yang serupa berlaku dalam hal-hal berikutnya.

Contoh 1.3

Cari anti turunan yang umum dari

$f(x) = x^{4/3}$.

<u>*Penyelesaian*</u>

$$\int x^{4/3}\,dx = \frac{x^{7/3}}{\frac{7}{3}} + C = \frac{3}{7}x^{7/3} + C$$

Perhatikan bahwa untuk anti penurunan suatu pangkat dari x kita perbesar pangkatnya dengan 1 dan membaginya dengan pangkat

Teorema B	
$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$

yang baru.

Bukti ringkasnya, ingat bahwa

$D_x(-\cos x) = \sin x$ dan $D_x(\sin x) = \cos x$

B. Rumus Integral Tak Tentu untuk Fungsi Aljabar

Untuk n bilangan rasional dengan $n \neq -1$ real maka berlaku aturan:

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

1. $\int ax^n dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + C$

Khusus untuk pangkatnya -1 maka berlaku aturan:

1. $\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$
2. $\int ax^{-1} dx = \int \frac{a}{x} dx = a \ln x + C$

Contoh 1.4

Tentukan hasil integral dari bentuk berikut:

$$\int x^3 dx$$

Penyelesaian

$\int x^3 dx$, artinya n = 3.

$$\int x^3 dx = \frac{1}{3+1} x^{3+1} + C$$

$$= \frac{1}{4} x^4 + C$$

Contoh 1.5

Tentukan hasil integral dari bentuk berikut:

$$\int 6x^3 dx$$

Penyelesaian

$\int 6x^3 dx$, artinya $a = 6, \quad n = 3$

$$\int 6x^3 dx = \frac{6}{3+1} x^{3+1} + C$$

$$= \frac{6}{4} x^4 + C$$

$$= \frac{3}{2} x^4 + C$$

C. Rumus Integral Tak Tentu Untuk Fungsi Trigonometri

1. $\int \sin (ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cos \ (ax + b) + C$
2. $\int \cos (ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin (ax + b) + C$
3. $\int \sec^2 (ax + b) dx = \frac{1}{a} \tan (ax + b) + C$
4. $\int \csc^2 (ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cot (ax + b) + C$

5. $\int \sec(ax+b)\ \tan(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sec(ax+b) + C$

6. $\int \csc(ax+b)\cot(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\csc(ax+b) + C$

Contoh 1.6

Tentukan hasil integral berikut ini:

$$\int 2\sin(4x+9)dx$$

<u>*Penyelesaian*</u>

$$\int 2\sin(4x+9)dx = 2\int \sin(4x+9)dx$$

$$= 2\left(-\frac{1}{4}\cos(4x+9)\right) + C$$

$$=-\frac{2}{4}\cos(4x+9)+C$$

$$=-\frac{1}{2}\cos(4x+9)+C$$

Contoh 1.7

Tentukan hasil integral berikut ini:

$$\int 4\sec^2(3t+1)dt$$

<u>Penyelesaian</u>

$$\int 4\sec^2(3t+1)dt = 4\int \sec^2(3t+1)dt$$

$$=4\times\frac{1}{3}\times\tan\ (3t+1)+C$$

$$=\frac{4}{3}\tan(3t+1)+C$$

Latihan Soal Bab 1

1. $f(x) = 4$
2. $f(x) = 2x - 4$
3. $f(x) = 3x^2 + \sqrt{2}$
4. $f(x) = 5x^4 + \pi$
5. $f(x) = x^{2/3}$
6. $f(x) = x^{-3/4}$
7. $f(x) = 6x^2 - 6x + 1$
8. $f(x) = 3x^2 + 10x - 7$
9. $f(x) = 18x^8 - 25x^4 + 3x^2$

10. $f(x) = x^2\left(20x^2 - 7x^4 + 6\right)$

11. $f(x) = \frac{4}{x^5} - \frac{3}{x^4}$

12. $f(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{6}{x^7}$

13. $f(x) = \frac{4x^6+3x^5-8}{x^5}$

14. $f(x) = \frac{2x^3-3x^3+1}{x^2}$

Dalam soal 15-22, cari integral tak tentu

15. $\int \left(x^3 + \sqrt{x}\right)$

16. $\int \left(x^2 + 1\right)^2$ dx

17. $\int \left(y^2 + 4y\right)^2 dy$

18. $\int y^2\left(y^2 - 3\right) dy$

19. $\int \frac{x^4-2x^3+1}{x^2} dx$

20. $\int \frac{x^3-3x^2+1}{\sqrt{x}} dx$

21. $\int (3\sin t - 2\cos t)\, dt$

22. $\int \left(3t^2 - 2\sin t\right) dt$

Dalam soal-soal 23-38, gunakan metode-metode pada contoh 5 dan 6 untuk mencari integral tak tentu

23. $\int (3x+1)^4 3\, dx$

24. $\int \left(x^2-4\right)^3 2x\, dx$

25. $\int \left(5x^3-18\right)^7 15x^2\, dx$

26. $\int \left(x^2-3x+2\right)^2 (2x-3)\, dx$

27. $\int 3x^4(2x^5+9)^3\,dx$

28. $\int 3x\sqrt{3x^2+7}\,dx$

29. $\int (5x^2+1)+(5x^3+3x+8)^6\,dx$

30. $\int (5x^2+1)\sqrt{5x^3+3x-2}\,dx$

31. $\int 3t\sqrt[3]{2t^2-11}\,dt$

32. $\int \frac{3y}{\sqrt{2y^2+5}}\,dy$

33. $\int sin^4 x\cos x\,dx$

34. $\int (\cos^4 2x)(-2\sin 2x)\,dx$

35. $\int (\sin^5 x^2)(x\cos x^2)\,dx$

36. $\int \cos(3x+1)\sin(3x+1)\,dx$

37. $\int \left(x^2+1\right)^3 x^2\,dx$

38. $\int (x^4-1)x^2\,dx$

BAB 2

INTEGRAL TENTU

Semua persiapan telah dikerjakan; kita siap mendefinisikan integral tentu. Newton dan Leibniz keduanya memperkenalkan versi yang dini dan konsep ini. Tetapi reimannlah yang memberikan kita defenisi modern. Dalam perumusan definisi ini, kita dipedomani oleh pemikiran yang dibahas dalam pasal sebelumnya. Gagasan pertama adalah jumlah Riemann.

Contoh 2.1

Hitung jumlah Riemann R_p untuk

$$f(x) = (x+1)(x-2)(x-4) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$$

Pada selang $[0,5]$ memakai partisi P dengan titik-titik partisi $0 < 1,1 < 2 < 3,3 < 4 < 5$ dan titik-titik sampel yang berpadanan

$\bar{x}_1 = 0,5; \bar{x}_2 = 1,5, \bar{x}_3 = 2,5, \bar{x}_4 = 3,6 \; dan \; \bar{x}_5 = 5$

Penyelesaian

$$R_P = \sum_{i=1}^{5} f(\bar{x}_1)\Delta x_i$$

$$= f(\bar{x}_1)\Delta x_1 + f(\bar{x}_2)\Delta x_2 + f(\bar{x}_3)\Delta x_3 + f(\bar{x}_4)\Delta x_4 + f(\bar{x}_5)\Delta x_5$$

$= f(0,5)(1,1 - 0) + f(1,5)(2 - 1,1) + f(2,5)(3,2 -$

$2) + f(3,6)(4 - 3,2) + f(5)(5 - 4)$

$$= (7{,}875)(1{,}1) + (3{,}125)(0{,}9) + (-2{,}625)(1{,}2) +$$

$$(-2{,}944) + (18(1)$$

= 23,9698

Contoh 2.2

Hitung jumlah Riemann untuk $f(x) = x^2 + 1$ pada selang $[-1,2]$ memakai titik-titik partisi berjarak sama -1< -0,5 < 0 < 0,5 < 1 < 1,5 < 2, dengan titik-titik sampel x_i adalah titik tengah selang bagian ke- i.

Penyelesaian perhatikan pada gambar 5

$$R_P = \sum_{i=1}^{6} f(\bar{x}_1)\Delta x_i$$

$$= [f(-0{,}75) + f(-0{,}25) + f(0{,}25) + f(0{,}75) +$$

$$f(1{,}25) + f(1{,}75)](0{,}5)$$

$= [1{,}5625 + 1{,}0625 + 1{,}0625 + 1{,}5625 + 2{,}5625 + 4{,}0625](0{,}5)$

= 5,9375

Contoh 2.3

Hitung $\int_{-2}^{3} (x+3)\, dx$.

Penyelesaian partisikan selang $[-2,3]$ menjadi n selang bagian yang sama, masing-masing dengan panjang $\Delta x = 5/n$. Dalam tiap selang bagian $[x_{i-1}, x_i]$ gunakan $x_i = x_i$ sebagai titik sampel. Maka,

$$x_0 = -2$$

$$x_1 = -2 + \Delta x = -2 + \frac{5}{n}$$

$$x_2 = -2 + 2\,\Delta x = -2 + \left(\frac{5}{n}\right)$$

$$x_i = -2 + i\,\Delta x = -2 + i\left(\frac{5}{n}\right)$$

$$x_n = -2 + n\,\Delta x = -2 + n\left(\frac{5}{n}\right) = 3$$

Jadi, $f(x) = x_i + 3 = 1 + i\left({}^{5}\!/_{n}\right)$, sehingga

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[1 + i\left(\frac{5}{n}\right)\right]\frac{5}{n}$$

$$= \frac{5}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{25}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \frac{5}{n}(n) + \frac{25}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= 5 + \frac{25}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Karena P adalah suatau partisi tetap, $|P| \to 0$ setara dengan $n \to \infty$, kita simpulkan bahwa

$$\int_{-2}^{3} (x+3)\, dx = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[5 + \frac{25}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]$$

$= \frac{35}{2}$

Contoh 2.4

Hitung $\int_{-1}^{3} (2x^2 - 8)\, dx.$

Penyelesaian

Tidak ada rumus sekolah menengah yang kan membantu di sini, walaupun integral memang berpadanan dengan $-A_1 + A_2,$ dengan A_1 dan A_2 adalah luas-luas daerah di bawah dan di atas sumbu x

Andaikan P suatu partisi tetap dari $[-1,3]$ atas n selang bagian sama, masing-masing sepanjang $\Delta x = {}^4\!/_n$. Dalam tiap selang bagian $[x_{i-1,}x_i]$, pilih x_i berupa titik ujung kanan, sehingga $x_i = x_i$. Maka

$$x_i =- 1 + i\Delta x =- 1 + i\left(\frac{4}{n}\right)$$

Dan

$$f(x_i) = 2x_i^2 - 8 = 2\left[-1 + i\left(\frac{4}{n}\right)\right]^2 - 8$$
$$=- 6 - \frac{16i}{n} + \frac{32i^2}{n^2}$$

Akibatnya,

$$\sum_{i=1}^{n} f(\,x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[-6 - \frac{16}{n} i + \frac{32}{n^2} i^2 \right] \frac{4}{n}$$

$$= -\frac{24}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{64}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i + \frac{128}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \frac{-24}{n}(n) - \frac{64}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{128}{n^3} \frac{n(n+1(2n+1)}{6}$$

$$= -24 - 32\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{128}{6}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

Kita simpulkan bahwa

$$\int_{-1}^{3} (2x^2 - 8) dx = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x_i$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[-24 - 32\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{128}{6}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$=- 24 - 32 + \frac{128}{3} = \frac{-40}{3}$$

Bahwa jawab adalah negative tidak mengherankan karena daerah di bawah sumbu-x lebih luas dari pada yang di atas

A. Pengertian Integral Tentu

Definisi

Andaikan f suatu fungsi yang didefinisikan pada

selang tutup $[a, b]$ jika,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x=a}^{b} f(x)\Delta x$$

Apabila f ada, dapat di katakan bahwa f

terintegralkan pada selang $[a, b]$. $\int_a^b f(x)dx$ disebut

B. Teorema Dasar Kalkulus

Teorema A

(Teorema Dasar Kalkulus). Andaikan f kontinn (karenanya terintegralkan) pada [a. b] dan andaikan P sebarang anti turunan dari f di sana. Maka,

$$\int_b^a f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Contoh 2.5

Perlihatkan bahwa $\int_a^b k\, dx = k(b-a), k$ kostanta.

Penyelesaian $F(x) = kx$ adalah suatu anti turunan dari $f(x) = k$. Sehingga menurut teorema dasar,

$$\int_a^b k\, dx = F(b) - F(a) = kb - ka = k(b-a)$$

Contoh 2.6

Perlihatkan bahwa $\int_a^b x\, dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$

Penyelesaian $F(x) = \frac{x^2}{2}$ adalah suatu anti turunan dari $f(x) = x.$ Karena itu,

$$\int_a^b x\,dx = F(b) - F(a) = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

Contoh 2.7

Perlihatkan bahwa jika *r* suatu bilangan rasional yang bukan -1, maka

$$\int_a^b x^r\,dx = \frac{b^{r+1}}{r+1} - \frac{a^{r+1}}{r+1}$$

Penyelesaian $F(x) = x^{r+1}/(r+1)$ adalah suatu anti turunan dari $f(x) = x^r$. Maka, menurut teorema dasar,

$$\int_a^b x^r\,dx = F(b) - F(a) = \frac{b^{r+1}}{r+1} - \frac{a^{r+1}}{r+1}$$

Hal teknis; jika *r* < 0, kita syaratkan bahwa 0 tidak dalam [*a,b*]. mengapa?

Adalah menguntungkan untuk memperkenalkan lambang baru untuk *F(b)-F(a).* kita tuliskan

$$F(b) - F(a) = [f(x)]_a^b$$

Sehingga misalnya,

$$\int_2^5 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^5 = \frac{125}{3} - \frac{8}{3} - \frac{117}{3} = 39$$

Contoh 2.8

Hitung $\int_{-1}^{2} (4x - 6x^2) dx.$

Penyelesaian

$$\int_{-1}^{2} (4x - 6x^2) dx = [2x^2 - 2x^3]^2 - 1$$

$= (8 - 16) - (2 + 2) = -12$

Contoh 2.9

Hitung $\int_1^8 \left(x^{1/3} + x^{4/3}\right) dx$

Penyelesaian

$$\int_1^8 \left(x^{1/3} + x^{4/3}\right) dx = \left[\frac{3}{4}x^{4/3} + \frac{3}{7}x^{7/3}\right]_1^8$$

$$= \left(\frac{3}{4} \cdot 16 + \frac{3}{7} \cdot 128\right) - \left(\frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{3}{7} \cdot 1\right)$$

$$= \frac{45}{4} + \frac{381}{7} \approx 65{,}68$$

Contoh 2.10

Hitung $\int_0^{\pi} 3 \sin x \, dx$.

Penyelesaian

$$\int_0^{\pi} 3 \sin x \, dx = [-3 \cos x]_0^{\pi} = 3 + 3 = 6$$

Dinyataan dalam lambing untuk integral tak-tentu, kita boleh menuliskan kesimpulan dari teorema dasar kalkulus sebagai

$$\int_a^b f(x) dx = \left[\int f(x) dx \right]_a^b$$

Bagian tak trivial dari penerapan teorema selalu berupa pencairan intrgral tak tentu $\int f(x)dx$. untuk melakukan itu kita mungkin ingin memakai teknik penggantian. (aturan pangkat Diperumum) yang kita pelajari di pasal 5.1.

Contoh 2.11

Hitung $\int_0^4 \sqrt{x^2+x}(2x+1)dx.$

Penyelesaian Andaikan $u = x^2 + x;$ maka $du = (2x+1)dx.$

Sehingga,

$$\int \sqrt{x^2+x}(2x+1)dx = \int u^{1/2}\,du = \frac{2}{3}u^{3/2} + C$$

$$= \frac{2}{3}\left(x^2 + x\right)^{3/2} + C$$

Karena itu menurut Teorema dasar,

$$\int_0^4 \sqrt{x^2 + x}\,(2x + 1)dx = \int u^{1/2}\,du = \frac{2}{3}u^{3/2} + C$$

$$= \frac{2}{3}\left(x^2 + x\right)^{3/2} + C$$

Karena itu menurut teorema dasar,

$$\int_0^4 \sqrt{x^2 + x}(2x + 1)dx = \left[\frac{2}{3}\left(x^2 + x\right)^{3/2} + C\right]_0^4$$

$$= \left[\frac{2}{3}(20)^{3/2} + C\right] - [0 - C]$$

$$= \frac{2}{3}(20)^{3/2} \approx 59{,}63$$

Perhatikan bahwa C dari integral tak tentu tercoret, yang selalu akan terjadi dalam integral tentu. Itulah sebabnya mengapa dalam pernyataan dari teorema dasar kita dapat menggunakan istilah *sebarang anti turunan*. Khususnya, kita selalu boleh memilih *C* = 0 dalam menerapkan teorema Dasar.

Contoh 2.12

Hitung $\int_0^{\pi/4} sin^3 2x \cos 2x \, dx.$

Penyelesaian Andaikan $u = \sin 2x;$ maka

$du = 2\cos 2x\,dx.$ Jadi,

$$\int sin^3 2x \cos 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (sin^3 2x)(2\cos 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int u^3 du$$

$$= \frac{1u^4}{2\ 4} + C = \frac{sin^4 2x}{8} + C$$

Karena itu, menurut teorema dasar,

$$\int_0^{\pi/4} sin^3 2x \cos 2x\,dx = \left[\frac{sin^4 2x}{8}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{8} - 0 = \frac{1}{8}$$

C. Rumus-rumus Integral Tentu

INTEGRAL TENTU SEBAGAI OPERATOR LINEAR, sebelumnya kita mempelajari bahwa

$D_x, \int .. \, dx$ dan Σ adalah operator linear.

Teorema B
(Kelinearan integral Tentu). Andaikan bahwa *f* dan *g* terintegralkan pada [*a,b*] dan bahwa *k* kostanta. Maka *kf* dan *f* + *g* adalah terintegralkan dan

i. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

ii. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ dan tak tentu

... $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

Bukti pembuktian tergantung pada kelinearan $\sum$ dan sifat-sifat limit. Kita perlihatkan (ii)

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(\bar{x}_i) + g(\bar{x}_i)]\Delta x_i$$

$$= \lim_{|P|\to 0} \left[\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} g(\bar{x}_i)\Delta x_i\right]$$

$$= \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i + \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Contoh 2.13

Hitung $\int_{-1}^{2}(4x-6x^2)dx$.

Penyelesaian ini sama seperti contoh 4, tetapi sekarang kita akan melakukannya secara lain dengan memanfaatkan kelinearan dari integral tentu.

$$\int_{-1}^{2}(4x-6x^2)dx = 4\int_{-1}^{2}x\,dx - 6\int_{-1}^{2}x^2\,dx$$

$$= 4\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} - 6\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}$$

$$= 4\left(\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right) - 6\left(\frac{8}{3}+\frac{1}{3}\right) =- 12$$

Contoh 2.14

Hitung $\int_0^1 \left[x^2 + \left(x^2+1\right)^4 x\right] dx$

Penyelesaian

$$\int_0^1 \left[x^2 + \left(x^2+1\right)^4 x\right] dx$$
$$= \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 \left(x^2+1\right)^4 dx$$

Integral yang pertama mudah dikerjakan secara langsung. Untuk menangani yang ke dua, kita andaikan $u = x^2 + 1$, sehingga $du = 2x\, dx$ dan menuliskan

$$\int \left(x^2+1\right)^4 dx = \frac{1}{2}\int \left(x^2+1\right)^4 dx = \frac{1}{2}\int u^4\, du$$

$$= \frac{1}{2}\ \frac{u^5}{5} + C = \frac{\left(x^2+1\right)^5}{10} + C$$

Karena itu,

$$\int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 \left(x^2+1\right)^4 x\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{\left(x^2+1\right)^3}{10}\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{3} - 0\right) + \left(\frac{32}{19} - \frac{1}{10}\right)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{31}{10} = \frac{103}{30}$$

D. Teorema Simetris, Teorema Periodik dan Torema Nilai Rata-rata

1. Teorema Simetris

Jika f adalah fungsi genap, maka:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

Jika f adalah fungsi ganjil, maka:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Catatan:

Fungsi f adalah fungsi genap jika

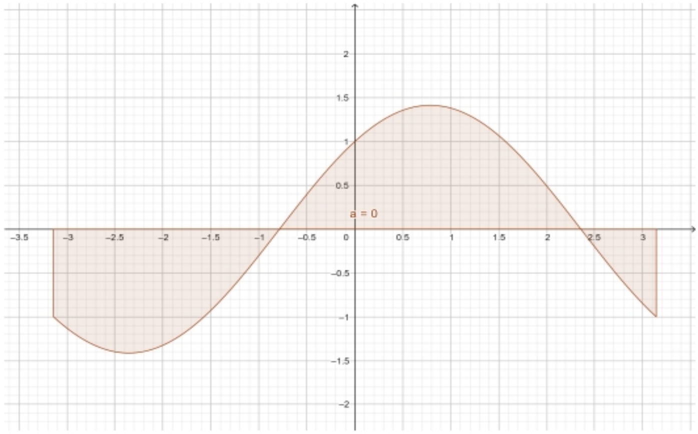
$f(-x) = f(x)$ untuk setiao $x \in D_f$.

Fungsi f adalah fungsi ganjil jika

$f(-x) =- f(x)$ untuk setiao $x \in D_f$.

Contoh 2.15

Hitunglah $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x + \cos x \, dx$.



Gambar 2. 1 grafik $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x + \cos x \, dx$.

Penyelesaian:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x + \cos x \, dx$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \, dx$$

Karena sin adalah fungsi ganjil, maka

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, dx = 0$

Karena sin adalah fungsi ganjil, maka

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \, dx = 2 \int_{0}^{\pi} \cos x \, dx$$

$$= 2 \sin x \Big|_{x=0}^{x=\pi} = 0$$

Jadi, $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x + \cos x \, dx = 0 + 0$$

$$= 0$$

Catatan:

Fungsi sin + cos bukan fungsi genap dan bukan fungsi ganjil.

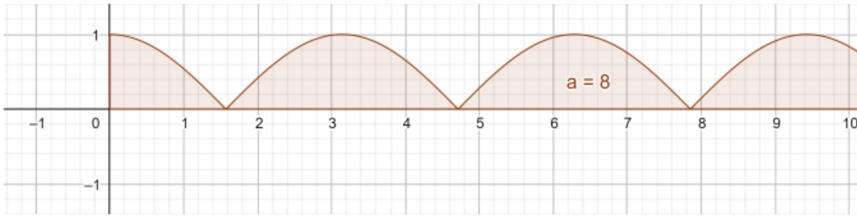
2. Teorema Priodik

Jika f adalah fungsi periodik dengan periode p, maka:

$$\int_{a+p}^{b+p} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Contoh 2.16

Hitunglah $\int_0^{4\pi} |\cos x|\, dx$.



Gambar 2. 2 grafik $\int_0^{4\pi} |\cos x|\, dx$

Penyelesaian:

Fungsi $|\cos x|$ mempunyai periode π.

$$\int_0^{4\pi} |\cos x|\, dx = \int_0^{\pi} |\cos x|\, dx + \int_0^{2\pi} |\cos x|\, dx$$

$$+ \int_{2\pi}^{3\pi} |\cos x|\, dx + \int_{3\pi}^{4\pi} |\cos x|\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} |\cos x|\, dx + \int_0^{\pi} |\cos x|\, dx$$

$$+$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} |\cos x|\, dx \quad + \quad \int_{2\pi}^{3\pi} |\cos x|\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} |\cos x|\, dx + \int_0^{\pi} |\cos x|\, dx$$

$$+$$

$$\int_0^{\pi} |\cos x|\, dx \quad + \quad \int_{\pi}^{2\pi} |\cos x|\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} |\cos x|\, dx + \int_0^{\pi} |\cos x|\, dx$$

$$+$$

$$\int_0^{\pi} |\cos x|\, dx \quad + \quad \int_0^{\pi} |\cos x|\, dx$$

$$= 4 \int_0^{\pi} |\cos x| dx$$

$$= 4\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, dx\right)$$

$$= 4\left(\sin x \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} - \sin x \Big|_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\pi}\right)$$

$$= 4\,[(1-0)-(0-1)] = 8$$

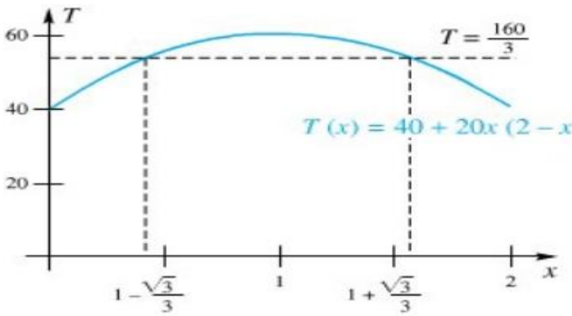
3. Teorema Nilai Rata-Rata

Jika fungsi f kontinu di $[a, b]$, maka ada bilangan c diantara a dan b sedemikian sehingga:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

Contoh 2.17

Misalkan suhu (dalam derajat celcius) suatu batang besi dengan panjang 2 m bergantung pada posisi x menurut fungsi $T(x) = 40 + 20x(2-x)$. Di titik mana suhunya sama dengan suhu rata-rata batang besi tersebut ?



Gambar 2. 3 grafik

$$T(x) = 40 + 20x(2 - x)$$

Penyelesaian

Suhu rata-rata batang besi tersebut adalah

$$\frac{160°}{3}C$$

Dengan teorema nilai rata-rata untuk integral,

$$f(c) = \frac{160}{3} \leftrightarrow 40 + 20c\,(2 - c)$$

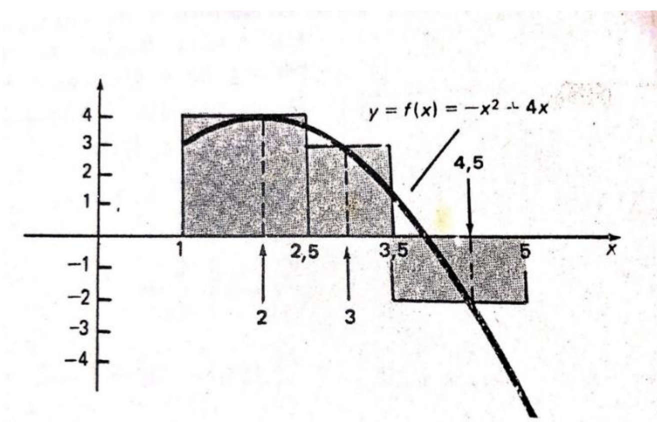
$$= \frac{160}{3}$$

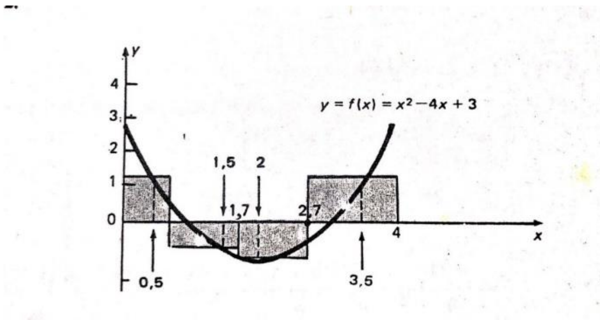
Didapat $c_1 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ dan $c_2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Latihan Soal Bab 2.1

Dalam soal 1 dan 2, hitung jumlah Riemenn yang ditunjuk (

1.



2. 

Dalam soal 3-6, hitung jumlah Riemenn

$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ untuk data yang diberikan

1. $f(x) = x - 1; P{:}3 < 3{,}75 < 4{,}25 < 5{,}5 < 6 < 7;$

$\bar{x}_1 = 3, \bar{x}_2 = 4, \bar{x}_3 = 4{,}75, \bar{x}_4 = 6, \bar{x}_5 = 6{,}5$

2. $f(x) = -{}^{x}/_{2} + 3; P{:} -3 < -1{,}3 < 0 < 0{,}9 < 2;$

$\bar{x}_1 =- 2, \bar{x}_2 =- 0{,}5, \bar{x}_3 = 0, \bar{x}_4 = 2$

3. $f(x) = {x^2}/{2} + 1; [-1,2]$ dibagi menjadi enam selang bagian sama, $\bar{x}_{i,}$ adalah titik tengah

4. $f(x) = {x^3}/{3} + 1; [0,2]$ dibagi menjadi delapan selang bagian sama $x_{i,}$ adalah titik ujung kanan

Dalam soal 7-10, gunakan nilai-nilai a dan b yang di berikan dan nyatakan limit yang diberikan sebagai integral tentu.

5. $\lim\limits_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (\bar{x}_i)^2 \Delta x_1; a = 1, b = 3$

6. $\lim\limits_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (\bar{x}_i + 1)^2 \Delta x_1; a = 0, b = 2$

7. $\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{\bar{x}_i}{1+\bar{x}_i} \Delta x_1; a = 0, b = 3$

8. $\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(cos^2 \bar{x}_i\right) \Delta x_1; a = 0, b = \pi$

Dalam soal 11-16, hitung integral tentu memakai definisi, seperti dalam contoh 3 dan 4

9. $\int_0^4 (2x + 3) dx$

Petunjuk: Gunakan $\bar{x}_i = \frac{4i}{n}$

10. $\int_0^4 \left(x^2 + 2\right) dx$

11. $\int_{-1}^{2} \left(x^2 - 1\right) dx$

Petunjuk: Gunakan $\bar{x}_i =- 1 + \frac{3i}{n}$

12. $\int_{-1}^{2}(2x^2+1)dx$

13. $\int_{0}^{4}(x^2-2x)dx$

14. $\int_{-1}^{2}(x^2+x+1)dx$

Latihan Soal 2.2

Dalam soal 1-14, gunakan teorema dasar kalkulus untuk menghitun tiap integral tentu

1. $\int_{0}^{2}x^3dx$ 17.

$\int_{-1}^{3}\frac{1}{(t+2)^2}\,dt$

2. $\int_{-1}^{2}x\,dx$ 18.

$\int_{2}^{10}\sqrt{y-1}\,dy$

3. $\int_{-1}^{2} (3x^2 - 2x + 3)dx$ 19.

$\int_{5}^{8} \sqrt{3x+1}\, dx$

4. $\int_{1}^{2} (4x^3 + 7)dx$ 20.

$\int_{1}^{7} \frac{1}{\sqrt{2x+2}}\, dx$

5. $\int_{1}^{4} \frac{1}{w^2} dw$ 21.

$\int_{-3}^{3} \sqrt{7+2t^2}\, (8t)dt$

6. $\int_{1}^{3} \frac{2}{t^3} dt$ 22.

$\int_{1}^{3} \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x}} dx$

7. $\int_{0}^{4} \sqrt{t}\, dt$ 23.

$\int_{0}^{\pi/2} cos^2x \sin x\, dx$

8. $\int_1^8 \sqrt[3]{w}\, dw$ 24.

$\int_0^{\pi/2} \sin^2 3x \cos 3x\, dx$

9. $\int_{-4}^{-2} \left(y^2 + \frac{1}{y^3}\right) dy$ 25.

$\int_0^{\pi/2} (2x + \sin x)\, dx$

10. $\int_1^4 \frac{s^4-8}{s^2}\, ds$ 26.

$\int_0^{\pi/2} [\,4x + 3 + \cos x]\, dx$

11. $\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx$ 27.

$\int_0^4 \left[\sqrt{x} + \sqrt{2x+1}\right] dx$

12. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} 2 \sin t\, dt$ 28.

$\int_{-4}^{-1} \frac{1-s^4}{2s^2}\, ds$

13. $\int_0^1 (2x^4 - 3x^2 + 5)\,dx$ 29.

$\int_0^1 (x^2 + 2x)^2 dx$

14. $\int_0^1 (x^{4/3} - 2x^{1/3})dx$ 30.

$\int_a^{8a} \left(a^{1/3} - x^{1/3}\right)^3 dx$

Dalam soal 15-30, gunakan teorema dasar kalkulus dikombinasikan dengan aturan pangkat di perumum untuk menghitung integral tntu yang diberikan (lihat contoh 7-10)

15. $\int_0^1 (x^2 + 1)^{10} (2x)dx$

16. $\int_{-1}^0 \sqrt{x^3 + 1}(3x^2)dx$

BAB 3
FUNGSI TRANSENDER

A. Fungsi Logaritma Asli

Definisi

Fungsi Logaritma Asli, ditulis sebagai ln, didefinisikan dengan

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt, \quad x > 0$$

Daerah definisinya adalah himpunan bilangan rill positif.

Contoh 3.1

Tentukan $D_x \ln\sqrt{x}$

Penyelesaian Andaikan $u = \sqrt{x} = x^{1/2}$ maka

$$D_x \ \ln\sqrt{x} = \frac{1}{x^{1/2}} \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2x}$$

Contoh 3.2

Tentukan $D_x \ln\left(x^2 - x - 2\right).$

Penyelesaian

Contoh ini ada artinya, asal $x^2 - x - 2 > 0$.

Oleh karena $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$, yang positif apabila $x < -1$ atau $x > 2$. Sehingga daerah definisi fungsi $\ln\left(x^2 - x - 2\right)$ adalah $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$.

Pada daerah ini berlakulah

$$D_x \ln\left(x^2 - x - 2\right) = \frac{1}{x^2 - x - 2} D_x\left(x^2 - x - 2\right)$$
$$= \frac{2x - 1}{x^2 - x - 2}$$

Contoh 3.3

Perlihatkan bahwa

$$D_x \ln|x| = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

Penyelesaian ada dua kasus. Apabila

$x > 0, |x| = x$

dan

$$D_x \ln|x| = D_x \ln x = \frac{1}{x}$$

Apabila $x < 0, |x| = -x,$ sehingga

$$D_x \ln|x| = D_x \ln(-x) = \frac{1}{-x} D_x(-x) = \left(\frac{1}{-x}\right)(-1)$$
$$= \frac{1}{x}$$

Pada setiap bentuk turunan itu ada rumus pengintegralan. Menurut contoh 3 kita peroleh

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, \quad x \neq 0$$

Kalau x diganti dengan variabel u, kita peroleh

$$\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C, \quad u \neq 0$$

Ini melengkapkan rumus pengintegralan

$$\int u^r du = \frac{u^{r+1}}{r+1}, r \neq -1$$

Contoh 3.4

Tentukan $\int \frac{5}{2x+7} dx$

Penyelesaian Andaikan

$u = 2x + 7, du = 2x\, dx$, sehingga

$$\int \frac{5}{2x+7} dx = \frac{5}{2} \int \frac{1}{2x+7} 2\, dx = \frac{5}{2} \int \frac{1}{u} du$$

$$= \frac{5}{2} \ln |u| + C = \frac{5}{2} \ln |2x + 7| + C$$

Contoh 3.5

Hitunglah $\int_{-1}^{3} \frac{x}{10-x^2} dx.$

Penyelesaian Andaikan

$u = 10 - x^2, du = -2x\,dx,$ maka

$$\int \frac{x}{10 - x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{-2x}{10 - x^2} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du$$

$$= -\frac{1}{2} \ln |u| + C = -\frac{1}{2} \ln \left|10 - x^2\right| + C$$

Menurut Teoremma Dasar Kalkulus kita peroleh

$$\int_{-1}^{3} \frac{x}{10 - x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} \ln \left|10 - x^2\right|\right]_{-1}^{3}$$

$$= -\frac{1}{2} \ln 1 + \frac{1}{2} \ln 9 = \frac{1}{2} \ln 9$$

Agar supaya perhitungan di atas dapat berlaku,

$10 - x^2$ tak boleh nol pada selang $[-1,3]$. Mudah dibuktikan bahwa hal ini memang terpenuhi.

Teorema A

Apabila *a* dan *b* bilangan-bilangan positif dan *r* sebuah bilangan rasional, maka

i. $\ln 1 = 0;$

ii. $\ln ab = \ln a + \ln b$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Bukti

i. $\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t} dt = 0$

ii. Oleh karena untuk x>0,

$$D_x \ln ax = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x}$$

Dan

$$D_x \ln x = \frac{1}{x}$$

Menurut (Teorema 4.8B) kita peroleh

$$\ln ax = \ln x + C$$

Untuk menghitung C, ambil $x = 1$, maka

$\ln a = C$, sehingga

$$\ln ax = \ln x + \ln a$$

Kemudian ambil $x = b$

iii. Dalam ii, ambillah $a = {}^1/_b$, maka

$$\ln \frac{1}{b} + \ln b = \ln \left(\frac{1}{b}, b\right) = \ln 1 = 0$$

Jadi

$$\ln \frac{1}{b} = -\ln b$$

Dengan menggunakan ii, kita peroleh

$$\ln\frac{a}{b} = \ln\left(a, \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\frac{1}{b} = \ln a - \ln b$$

iv. Untuk $x > 0$ berlaku

$$D_x(\ln x^r) = \frac{1}{x^r} \cdot rx^{r-1} = \frac{r}{x}$$

Dan

$$D_x(r \ln x) = r \cdot \frac{1}{x} = \frac{r}{x}$$

Ini berarti menurut teorema yang kita gunakan di atas dalam (ii) bahwa

$$\ln x^r = r \ln x + C$$

Misalkan $x = 1$, maka memberikan $C = 0$. Ini berarti bahwa

$$\ln x = r \ln x$$

Hasilnya ekuivalen dengan (iv)

Soal 1

1. Gunakan aproksimasi ln 2 = 0,693 dan ln 3= 1,099 dan sifat-sifat dalam Teorema A untuk mengaproksimasi logaritma berikut.

   Misalnya $\ln 6 = \ln(2 \cdot 3) = \ln 2 + \ln 3$

   a. $\ln 6$

   b. $\ln 1{,}5$

   c. $\ln 81$

   d. $\ln \sqrt{2}$

   e. $\ln\left(\frac{1}{36}\right)$

   f. $\ln 48$

   Dalam soal 2-13 tentukan turunan-turunan yang ditunjukkan pada masing-masing soal (lihat contoh 1 dan 2). Diandaikan bahwa x ada dalam daerah tinggi logaritma yang bersangkutan.

2. $D_x \ln\left(x^2 - 5x + 6\right)$

3. $D_x \ln\left(2x^3 + 1\right)$

4. $D_x \ln(x - 5)^4$

5. $D_x \ln\sqrt{3x - 25}$

6. $\frac{dy}{dx}$ jika $y = x \ln x$

7. $\frac{dy}{dx}$jika $y = \frac{\ln x}{x^2}$

8. $\frac{dy}{dx}$jika $\mathrm{y} = \ln x^3 + (\ln x)^3$

9. $\frac{dy}{dx}$jika $\mathrm{y} = \frac{1}{\ln x} + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

10. $f^{'}(x)$ jika $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

11. $f^{'}(x)$ jika $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

12. $f^{'}(100)$ jika $f(x) = \ln\sqrt[3]{x}$

13. $f^{'}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ jika $f(x) = \ln(\sin x)$

Dalam soal 14-21 hitunglah integral berikut (lihat contoh 4 dan 5)

14. $\int \frac{4}{2x+1} dx$

15. $\int \frac{2}{4x-3} dx$

16. $\int \frac{4x+2}{x^2+x+5} dx$

17. $\int \frac{x}{x^2+4} dx$

18. $\int \frac{\ln x}{x} dx$

19. $\int \frac{2}{x(\ln x)^2} dx$

20. $\int_0^3 \frac{x^3}{x^4+1} dx$

21. $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx$

Dalam soal 22-25, gunakan teorema A untuk menyatakan bentuk-bentuk berikut sebagai satu logaritma

22. $2\ln(x+1) - \ln x$

23. $\frac{1}{2}\ln(x-9) + \frac{1}{2}\ln x$

24. $\ln(x-2) - \ln(x+2) + 2\ln x$

25. $\ln(x^2-9) - 2\ln(x-3) - \ln(x+3)$

Dalam soal 26-29, tentukan $\frac{dy}{dx}$ dengan menggunakan pendiferensialan logaritma

26. $y = \frac{x+11}{\sqrt{x^3}-4}$

27. $y = (x^2 + 3x)(x - 2)(x^2 + 1)$

28. $y = \frac{\sqrt{x+13}}{(x-4)\sqrt[3]{2x+1}}$

29. $y = \frac{(x^2+3)^{2/3}(3x+2)^2}{\sqrt{x+1}}$

B. Fungsi Invers dan Turunannya

EKSISTENSI FUNGSI INVERS kita sekarang hendak mencari persyaratan bila suatu fungsi *f* memiliki balikan. Salah satu ciri adalah bahwa fungsi itu adalah satu-satu. Yakni

$x_1 \neq x_2$ mengakibatkan

$f(x_1) \neq f(x_2)$. Ini ekuivalen dengan persyaratan geometri bahwa tiap garis datar memotong grafik $y = f(x)$ pada paling banyak satu titik. Akan tetapi dalam suatu keadaan tertentu, ciri tersebut agak sulit dipakai, sebab kita harus mengetahui "jalan" grafik fungsi tersebut dengan lengkap. Suatu ciri dan sifat yang agak mudah dipakai ialah bahwa fungsi tersebut harus monoton murni.

> Teorema A
>
> Apabila *f* monoton murni pada daerah asalnya, maka *f* memiliki invers

Teorema A tersebut mudah digunakan, sebab untuk menentukan apakah *f* monoton, kita cukup menyelediki tanda dari *f*

Contoh 3.6

Buktikan bahwa $f(x) = 2x + 6$ memiliki invers, tentukan rumus untuk $f^{-1}(y)$ dan cocokkanlah dengan rumus dalam kotak di atas.

Penyelesaian oleh karena *f* fungsi naik, maka $f^{-1}(y)$, kita mencari *x* dan *y* $= 2x + 6$ yang menghasilkan $x = (y - 6)$ / $2 = f^{-1}(y)$ sedangkan

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x + 6) = \frac{(2x + 6) - 6}{2} = x$$

Sedangkan

$$f(f^{-1}(y)) = f\left(\frac{y - 6}{2}\right) = 2\,\frac{y - 6}{2} + 6 = y$$

GRAFIK $y = f^{-1}(x)$ Andaikan f memiliki invers, maka

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$$

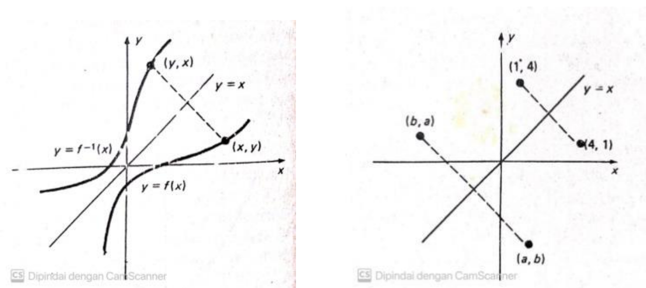
Jika $y = f(x)$ dan $x = f^{-1}(y)$ menentukan pasangan bilangan (x,y) yang sama, sehingga grafik dua hubungan itu identic. Akan tetapi kita biasanya menggunakan x sebagai variabel bebas dan y variabel tidak bebas. Timbul pertanyaan, bagaimanakah bentuk grafik

$y = f^{-1}(x)$ (perhatikan bahwa kita telah menukar peranan x dan y). apabila kita perhatikan penukaran peranan ini mengakibatkan pencerminan grafik pada garis

$y = x.$ *kiri berarti bahwa grafik*

$y = f^{-1}(x)$ *adalah gambar cermin*

grafik $y = f(x)$ *pada garis y=x*



Gambar 3. 1

Cara yang sama dapat pula digunakan untuk menemukan suatu rumus untuk

$f^{-1}(x).$ untuk hal ini kita tentukan terlebih

dahulu $f^{-1}(y)$, kemudian kita tukar *x* dan *y* dalam rumus $x = f^{-1}(y)$. Jadi kita dapat menentukan $g = f^{-1}(x)$ dengan langkah-langkah berikut:

Langkah 1 nyatakan x dengan y dari persamaan

$y = f(x)$

Langkah 2 Nyatakan bentuk y yang telah ditemukan itu sebagai $f^{-1}(y) \Rightarrow x = f^{-1}(y)$

Langkah 3 Gantilah kemudian y dengan x dan x dengan y dalam bentuk $x = f^{-1}(y)$ kita peroleh $y = f^{-1}(x)$

Contoh 3.7

Tentukan rumus untuk $f^{-1}(x)$ apabila

$y = f(x) = \frac{x}{1-x}$.

Penyelesaian kita buktikan terlebih dahulu bahwa *f* memiliki invers. Akan tetapi, apabila dalam langkah pertama kita memperoleh *satu nilai x* untuk tiap *y*, maka f^{-1} ada. (perhatikan bahwa $y = g(x) = x^2$, kita peroleh $x = \pm\sqrt{y}$, yang menyatakan bahwa g^{-1} tidak ada. Dengan membatasi daerah asal *x*, kita dapat memperoleh g^{-1}).

Untuk contoh ini, langkah-langkah di atas menghasilkan

Langkah 1

$$y = \frac{x}{1 - x}$$

$$(1 - x)y = x$$

$$y - xy = x$$

$$x + xy = y$$

$$x(1 + y) = y$$

$$x = \frac{y}{1+y}$$

Langkah 2

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1+y}$$

Langkah 3

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{1+x}$$

Teorema B

(teorema fungsi invers). Andaikan *f* dapat diturunkan dan monoton murni pada selang *I*. apabila $f'(x) \neq 0$ pada suatu *x* dalam *I*, maka f^{-1}

dapat diturunkan di titik $y = f(x)$ pada daerah

Soal 2

Dalam soal 1-7, buktikan bahwa *f* memiliki invers dengan membuktikan bahwa *f* monoton murni

1. $f(x) = -3x^5 - x$

2. $f(x) = x^7 - 5x^3$

3. $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

4. $f(x) = \cos x, 0 \leq x \leq \pi$

5. $f(x) = (x+1)^2, x \leq -1$

6. $f(x) = x^2 + x + 5, x \geq -\frac{1}{2}$

7. $f(x) = \int_0^x \sqrt{t^2 + 2}\, dt$

C. Fungsi Eksponen Asli

Definisi

Invers ln disebut fungsi eksponen asli dan ditulis sebagai exp, yaitu:

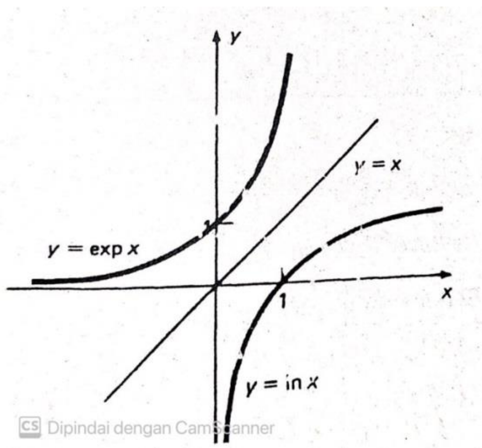
$x = \exp y \Leftrightarrow y = \ln x$

Dari defenisi ini kita dengan segera memperoleh:

i. $\exp(\ln x) = x \qquad x > 0;$

ii. $\ln(\exp y) = y$ untuk semua y

Oleh karena exp dan ln adalah fungsi-fungsi invers, grafik $y = \exp x$ adalah grafik $y = \ln x$ yang dicerminkan pada garis $y = x$ (Gambar dibawah)



Gambar 3. 2

SIFAT FUNGSI EKSPONEN kita mulai dengan

memperkenalkan bilangan seru, seperti bilangan

π

, yang dilambangkan dengan huruf *e*. bilangan ini amat penting di dalam matematika, ia untuk pertama kali digunakan oleh ahli matematika Leonhard Euler.

Definisi

Bilangan *e* adalah bilangan rill positif yang bersifat $\ln e = 1.$

Oleh karena $\ln e = 1$, maka $\exp 1 = e$,

π

seperti bilangan *e* adalah bilangan tak rasional. Orang telah menghitungnya sampai seribu angka di belakang koma, Misalnya

$e \approx 2{,}718281828459045$

Sekarang kita melakukan pengamatan penting, yang hanya bergantung pada fakta-fakta yang telah di perlihatkan; (i) di atas dan teorema 7.1A. jika *r* adalah bilangan rasional tertentu

$$e^r = \exp(\ln e^r) = \exp(r \ln e) = \exp r$$

Marilah kita tekankan pentingnya hasil di atas itu. Untuk *r* yang rasional, $\exp r$ adalah identic dengan e^r. Apa yang tidak diperkenalkan dengan cara yang sangat abstrak sebagai invers logaritma asli, yang dengan sendirinya ditentukan oleh suatu integral, ternyata tidak lain dari suatu pangkat.

Perhatikan bahwa (i) dan (ii) pada awal bagian ini sekarang mengambil bentuk:

i. $e^{\ln x} = x, \ldots x > 0$

ii. $\ln(e^y) = y,\ \text{untuk semua } y$

Kita juga dapat membuktikan sifat-sifat berikut.

Teorema A

Andaikan *a* dan *b* bilangan rasional, maka

$e^a e^b = e^{a+b}$ and $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

Bukti :

Untuk membuktikan bagian yang pertama kita

$$e^a e^b = \exp\left(\ln e^a e^b\right)$$

memuat (ii)

$= \exp\left(\ln e^a + \ln e^b\right)$ memuat teorema 7.1A

$= \exp(a + b)$ memuat (ii)′

$= e^{a+b}$

Soal 3

1. Gunakan kalkulator atau daftar II-IV dari appendiks untuk menghitung soal-soal di bawah ini

   Pada beberapa kalkulator ada tombol $\boxed{e^x}$ pada kalkulator-kalkulator lainnya orang harus menekan tombol $\boxed{\text{INV}}$ atau tombol $\boxed{\ln x}$

a. e^3 e. $e^{\sqrt{2}}$

b. e^{-4} f. $e^{\sin 4}$

c. $e^{2,1}$ g. $e^{\cos\,(\ln 4)}$

d. $e^{6,3}$

Dalam soal 2-9, sederhanakanlah bentuk-bentuk yang berikut ini

1. $e^{2\ln x}$ 6. $\ln\left(x^2 e^{-2x}\right)$

2. $e^{-\ln x}$

7. $e^{x+\ln x}$

3. $\ln e^{\sin x}$ 8.

$e^{\ln 2+\ln x}$

4. $\ln e^{-x+2}$

9. $e^{\ln x-2\ln y}$

Dalam soal 10-19, tentukan $D_{x}y$

10. $y = e^{2x+1}$ 15.

$y = e^{3x^2-x}$

11. $y = e^{3x^2-x}$ 16. $y = x^2e^x$

12. $y = e^{\sqrt{x+1}}$ 17. $y = e^{x^2 \ln x}$

13. $y = e^{1/x^3}$ 18. $y = e^{\sqrt{x}} + \sqrt{e^x}$

14. $y = e^{\ln x}$ 19. $y = e^{1/x} + \frac{1}{e^x}$

D.Penerapan Fungsi Eksponen Asli

Fungsi eksponen asli dapat diterapkan pada pertambahan atau peluruhan yang berbanding lurus dengan waktu yang digunakan. Misalnya penambahan Δy populasi dalam jangka waktu Δt. Sebanding dengan banyaknya penduduk pada awal jangka waktu itu dan sebanding dengan panjangnya jangka waktu itu sendiri.

Jadi $\Delta y = ky.\Delta t$ atau $\frac{\Delta y}{\Delta t} = ky$.

Kondisi $y = y_0$ pada $t = 0,$ menghasilkan $c = \ln y_0$, jadi:

$$\frac{dy}{dt} = ky \begin{cases} k > 0 \ Populasi\ meningkat \\ dan\ k < 0 \ Populasi\ menurun \end{cases}$$

Kita selesaikan persamaan diferensial $\frac{dy}{dt} = ky,$ sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dt} = ky,$$

$$\frac{dy}{y} = k\,dt$$

$$\ln y = \int k\,dt$$

$$\ln y = kt + C$$

Untuk $t = 0$ maka $y = y_0$ dan $c = \ln y_0$, sehingga:

$$\ln y = kt + \ln y_0$$

$$\ln y - \ln y_0 = kt$$

$$\ln \frac{y}{y_0} = kt$$

$$\frac{y}{y_0} = e^{kt}$$

$$y = y_0 e^{kt}$$

Contoh 3.8

Di dalam suatu pembiakan, laju pertumbuhan bakteri berbanding lurus dengan jumlah bakteri yang ada, jika mula-mula ada 1.000 bakteri dan jumlahnya menjadi dua kali lipat setelah 12 menit, berapa lama waktu yang diperlukan agar jumlah bakteri menjadi 1.000.000 ?

Penyelesaian:

Misalkan t menit telah berlalu sejak sekarang, dan y jumlah bakteri pada t menit. Dan T menit adalah waktu yang diperlukan untuk mencapai jumlah 1.000.000 bakteri maka tabelnya adalah:

t	0	12	T
y	1.000	2.000	1.000.000

Persamaan diferensialnya adalah $\frac{dy}{dt} = ky,$ dimana k tetap dan $y = 1.000$ bila $t = 0.$ Kita mempunyai pertumbuhan wajar dengan persamaan:

$y = 1.000\, e^{kt}$

Karena $y = 2.000$ bila $t = 12,$ maka

$2.000 = 1.000\, e^{kt}$

$12k = \ln 2$

$k = \frac{\ln 2}{12} = 0,05776$

Sehingga,

$y = 1.000\, e^{0,0577t}$

Untuk $t = T, y = 1.000.000,$ diperoleh:

$1.000.000 = 1.000\, e^{0,0577\,T}$

$e^{0,0577T} = 1.000$

$$0,0577T = \ln 1.000$$

$$T = \frac{\ln 1.000}{0,0577} = 119,6$$

Jadi, akan ada 1.000.000 bakteri setelah 119,6 menit atau 1 jam, 59 menit, 36 detik.

E. Fungsi Hiperbolik

Didalam matematika terapan digunakan banyak sekali campuran tertentu fungsi-fungsi

e^x dan e^{-x}. oleh karena itu fungsi campuran ini kita beri nama khusus

Definisi

(fungsi hiperbol) fungsi sinus hiperbol, kosinus hiperbol dan empat fungsi sejenis lainnya didefinisikan sebagai berikut:

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

TURUNAN FUNGSI HIPERBOL. Apabila kita dapat menentukan

$D_x \sinh x$ dan $D_x \cosh x$

Turunan fungsi hiperbolik lainnya dapat dicari dengan menggunakan aturan turunan hasil bagi. Kita peroleh

$$D_x \sinh x = D_x \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

Dan

$$D_x \cosh x = D_x \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

Perhatikan bahwa fakta-fakta ini mengkonfirmasikan karakter dari grafik yang kita gambar. Misalnya, karena

$$D_x \sinh x = \cosh x$$

$$D_x \cosh x = \sinh x$$

$$D_x \tanh x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$D_x \coth x = -\operatorname{csch}^2 x$$

$$D_x \operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

ini adalah daftar dari 6 rumus penurunan

Contoh 3.9

Tentukan $D_x \tanh(\sin x)$,

Penyelesaian

$D_x \tanh(\sin x) = \operatorname{sech}^2(\sin x)\, D_x(\sin x)$

$= \cosh x \cdot \operatorname{sech}^2(\sin x)$

Contoh 2 Tentukan $D_x \cosh^2 (3x - 1)$

Penyelesaian kita gunakan dua kali aturan rantai

$D_x \cosh^2 (3x - 1)$

$$= 2 \cosh (3x - 1) D_x \cosh\ (3x - 1)$$

$$= 2 \cosh (3x - 1) \sinh (3x - 1)\ D_x(3x - 1)$$

$$= 6 \cosh (3x - 1) \sinh (3x - 1)$$

Soal 7

Dalam soal 1-6, buktikan kesamaan berikut:

1. $e^x = \cosh x + \sinh x$

13. $y = \sinh 4x \cosh 2x$

2. $e^{-x} = \cosh x - \sinh x$

14. $y = \sinh 3x \cosh 5x$

3. $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh x + \cosh x \sinh x$

15. $y = \cosh^{-1}(x^3)$

4. $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

16. $y = \tanh^{-1}(2x^5 - 1)$

5. $\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$

17. $y = \mathrm{x} \sinh^{-1}(2x)$

6. $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$

18. $y = \ln\left(\sinh^{-1} x\right)$

Dalam soal 7-20, tentukan D_{xy}:

7. $y = \sinh^2 x$

19. $y = \sinh(\cos x)$

8. $y = 5\sinh^3 x$

20. $y = \sinh^{-1}(\sin x)$

9. $y = \cosh(x^2 - 1)$

10. $y = \ln(\coth x)$

11. $y = x^2 \sinh x$

12. $y = e^x \cosh x$

Latihan Soal Bab 3

1. Tentukan dy/dx dari:

a. $y = \ln(4x+5)$ f.

$e^{xy} + y = 2$

b. $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ g.

$y = e^x \operatorname{coch} x$

c. $\ln xy + x + y = 2$ h.

$y = \sinh 4x \ \cosh\ 2x$

d. $y = x^5 e^{-3\ln x}$ i.

$y = \cosh(x^2 - 1)$

e. $y = e^{x^2-3}$

2. Selesaikanlah:

(i) $\int \frac{4}{2x+1}\, dx$ f.

$\int \frac{e^x+e^{-x}}{2}\, dx$

(ii) $\int \frac{4x+2}{x^2+x+5}\, dx$ g.

$\int x \cosh\left(x^2+3\right) dx$

(iii) $\int \frac{3x}{x^2+4}\, dx$ h.

$\int e^x \sinh e^x\, dx$

(iv) $\int e^{3x-1}\, dx$ i.

$\int \sinh^4 x \cosh x\, dx$

(v) $\int (x+3)e^{x^2+6x} dx$

3. Laju pertumbuhan wajar populasi suatu kota berbanding lurus dengan populasinya, jika populasi bertambah dari 40.000 menjadi 60.000 dalam waktu 40 tahun, kapan populasinya menjadi 80.000 ?
4. Populasi suatu binatang langkah berkurang dengan laju yang sebanding dengan jumlahnya. Pada tahun 1975 populasinya adalah 50.000 dan 1985 populasinya 44.000. berapakah populasi pada tahun 1995 ?

BAB 4
TEKNIK INTEGRASI

A. Integral Parsial

Apabila pengintegralan dengan metode substitusi tidak berhasil, dengan menerapkan metode penggunaan ganda, yang lebih dikenal dengan pengintegralan parsial dapat memberikan hasil. Metode ini didasarkan pada pengintegralan rumus turunan hasil kali dua fungsi.

Andaikan $u = u(x)$ dan $v = v(x)$. maka

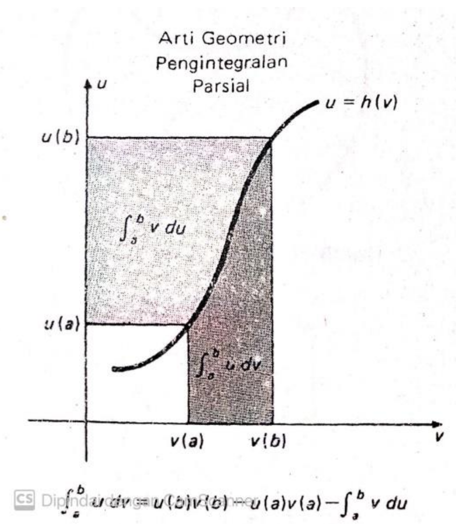
$$D_x[u(x)v(x)] = u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$$

Dengan mengintegralkan dua ruas persamaan tersebut, kita memperoleh

$$u(x)v(x) = \int u(x)v'(x)dx + \int v(x)u'(x)dx$$

Atau

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$



Karena

$$dv = v'(x)dx$$

dan

$$du = u'(x)dx,$$

persamaan terakhir dapat di tulis sebagai berikut:

Pengintegralan parsial integral tak tentu

$$\int u\,dv = vv - \int v\,du$$

S

Sedangkan rumus untuk pengintegralan parsial integral tentu adalah

Gambar 4. 1

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

Kita ringkas sebagai berikut (lihat gambar diatas)

Pengintegralan parsial integral tentu

$$\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du$$

Rumus diatas memungkinkan kita memindahkan pengintegralan $u\,dv$ pada pengintegralan $v\,du$. Pengintegralan terakhir ini tergantung pada pemilihan u dan dv yang tepat.

Contoh 4.1

Tentukan $\int_1^2 \ln x\,dx$

Penyelesaian kita gunakan subtitusi ganda berikut

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

$$du = \left(\frac{1}{x}\right) dx$$

$$v = x$$

Sehingga

$$\int_1^2 \ln x \, dx = [x \ln x]_1^2 - \int_1^2 x \frac{1}{x} dx$$

$$= 2 \ln 2 - \int_1^2 dx$$

$$= 2 \ln 2 - 1$$

Soal 1

Gunakan pengintegralan parsial untuk menyelesaikan soal 1-18 di bawah ini:

1. $\int xe^x dx$

10.

$\int z^2 \ln z \, dz$

2. $\int xe^{3x} dx$

11.

$\int x \tan^{-1} dx$

3. $\int x \sin 3x \, dx$

12.

$\int t \cos 4t \, dt$

4. $\int la\ 3x \, dx$

13.

$\int w \ln w \, dw$

$\int \tan^{-1} x \, dx$

5. 14.

$\int x \cos^2 x \sin x \, dx$

$\int x\sqrt{x+1} \, dx$

6. 15.

$\int_{\pi/6}^{\pi/2} x \csc^2 x \, dx$

$\int t \sec^2 5t \, dt$

7. 16.

$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc^3 x \, dx$

$\int \tan^{-1}(1/t) dt$

8. 17.

$\int x a^x dx$

$\int \sqrt{x} \ln x \, dx$

9. 18.

$\int x \sin^3 x \, dx$

B. Integral Fungsi Trigonometri

Integral trigonometri atau sering dikenal dengan fungsi trigonometri adalah fungsi yang memuat trigonometri. Pada bab sebelumya sudah dibahas integral adalah anti turunan fungsi, dalam menentukan integral trigonometri tidak jauh berbeda dengan menentukan integral tak tentu lainya yang sudah dijelaskan di awal buku ini. Dalam integral trigonometri apabila kita menggunakan metode substitusi dan dibarengi dengan pemakaian kesamaan trigonometri yang tepat, maka kita dapat mengintegralkan berbangai bentuk trigonometri.

Enam jenis integral yang sering muncul:

1. $\int \sin^n x \, dx$ dan $\int \cos^n x \, dx$
2. $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$
3. $\int \tan^n x \, dx$ dan $\int \cot^n x \, dx$
4. $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$ dan $\int \cot^m x \csc^n x dx$
5. $\int \sin mx \cos nx \, dx$ dan $\int \cos mx \sin nx \, dx$
6. $\int \sin mx \sin nx \, dx$ dan $\int \cos mx \cos nx \, dx$

Rumus-rumus identitas fungsi trigonometri

a. $\sin^2 x + cos^2 x = 1$

b. $1 + tan^2 x = sec^2 x$

c. $1 + cot^2 x = csc^2 x$

d. $$sin^2 x = \frac{1-coc2x}{2}$$

e. $$cos^2 x = \frac{1+coc2x}{2}$$

f. $$\sin^2 x - cos^2 x = cos2x$$

g. $$sin2x = 2\, sinx\, cosx$$

h. $$\sin mx.\cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$$

i. $$\sin mx.\sin nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x - \cos(m-n)x]$$

j. $$\cos mx.\cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \cos(m-n)x]$$

Di dalam menyelesaikan soal integral fungsi trigonometri langkah pertama yang harus diingat dan dipahami adalah rumus identitas trigonometri. Dengan memahami identitas trigonometri maka sangat membantu dalam menyelesaikan integral fungsi trigonometri.

$$\int \sin^n x \, dx \;\; \text{dan} \;\; \int \cos^n x \, dx$$

JENIS 1

Perhatikan pertama apabila n bilangan bulat ganjil dan positif. Setelah kita mengeluarkan faktor sin x atau cos x, gunakan persamaan salah satu identitas trigonometri

yaitu $\sin^2 x + cos^2 x = 1$.

Contoh 4.2 (n Ganjil dan Positif)

Tentukan $\int \sin^5 x \, dx$

Misalkan $u = \cos x$

Maka $\frac{du}{dx} = -\sin x$

Sehingga, $\int \sin^5 x \, dx = \int \sin^4 x \sin x \, dx$

$$= \int (1 - cos^2 x)^2 \sin x \, dx$$

$$= \int (1 - 2cos^2 x + cos^4 x) \sin x \, dx$$

$$= \int \left(1 - 2u^2 + u^4\right)(\sin x)\left(\frac{du}{-\sin x}\right)$$

$$= \int \left(-1 + 2u^2 - u^4\right) du$$

$$=-u+\frac{2}{3}u^3-u^5+c$$

$$=-\cos x+\frac{2}{3}cos^3x-\frac{1}{3}cos^5x+c$$

Contoh 4.3 $\int \sin^n x \, dx$, $\int \cos^n x \, dx$ **(n Genap dan Positif)**

n genap dan positif, maka digunakan rumus setengah sudut

$$sin^2x=\frac{1-coc2x}{2},\ \ cos^2x=\frac{1+coc2x}{2}$$

1. $\int sin^2x\,dx=\int\frac{1-coc2x}{2}\,dx$

$$=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{4}\int (cos2x)(2)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{4}\int (cos2x)d(2x)$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}sin2x+c$$

2. $\int cos^4 x\,dx=\int cos^4 x\,dx$

$$=\int (cos^2x)^2dx$$

$$=\int (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x)^2dx$$

$$=\int \frac{1}{4}+\frac{1}{2}cos2x+\frac{1}{4}cos^2 2x)dx$$

$$=\int [\frac{1}{4}+\frac{1}{2}cos2x+\frac{1}{4}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4x)]dx$$

$$=\int [\frac{1}{4}+\frac{1}{2}cos2x+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cos 4x)]dx$$

$$=\frac{3}{8}x+\frac{1}{2}.\frac{1}{2}sin2x+\frac{1}{8}.\frac{1}{4}sin4x+c$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}sin2x + \frac{1}{32}.sin4x + c$$

$$\int \mathbf{sin}^m \mathbf{x}\ \mathbf{cos}^n\ \mathbf{x}\ \mathbf{dx}$$

JENIS 2

Apabila m atau n ganjil positif sedangkan eksponen yang lain bilangan sebarang, kita keluarkan sin x atau cos x dan menggunakan indentitas trigonometri yang pertama dalam tabel

$$\sin^2 x + cos^2 x = 1$$

.

Contoh 4.4 (m atau n Ganjil)

Tentukan $\int sin^2 x\ cos^3 x\ dx.$

$$\int sin^2 x\ cos^3 x\ dx = \int sin^2 x\ cos^2 x.\cos x\ dx$$

$$= \int sin^2x\left(1 - sin^2x\right) \cos x \, dx$$

$$= \int \left(sin^2x - sin^4\right)(\cos x)dx$$

Misalkan u = $\sin x$

Maka $\dfrac{du}{dx} =- \cos x$

Sehingga $\int sin^2x \, cos^3x \, dx$

$$= \int \left(sin^2x - sin^4\right)(\cos x)\left(\frac{du}{-\cos x}\right)$$

$$=- \int \left(u^2 - u^4\right)(du)$$

$$=- \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 - c$$

$$=- \frac{1}{3}sin^3x + \frac{1}{5}sin^5x - c$$

Contoh 4.5 $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$, (m dan n genap)

m dan n genap dan dan positif, maka hal ini menggunakan rumussetengah sudut

$$sin^2 x = \frac{1 - coc2x}{2}, \quad cos^2 x = \frac{1 + coc2x}{2}$$

Tentukan $\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx$.

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx = \int \left(\frac{1 - coc2x}{2}\right)\left(\frac{1 + coc2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 - coc2x)\left(1 + 2cos^2 x + cos^2 2x\right)dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 + 2\cos 2x + cos^2 2x - cos2x - 2cos^2 x - cos^3 2x)dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 + \cos 2x - cos^2 2x - cos^3 2x)dx$$

$$= \frac{1}{8}[\int (1 + cos2x)\, dx - \int (cos^2 2x) dx - \int (cos^3 2x) dx]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\left(x + \frac{1}{2}sin2x\right) - \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}sin4x\right) - \frac{1}{2}\left(sin2x - \frac{sin^3 2x}{3}\right)\right] + c$$

$$= \frac{1}{16}\left(2x - \frac{1}{4}sin4x + \frac{sin^3 2x}{3}\right) + c$$

JENIS 3 $\int \tan^n x\, dx$, $\int \cot^n x\, dx$

Dalam kasus tangen, keluarkan factor $tan^2 x$ dan kemudian gunakan kesamaan $tan^2 x = sec^2 x - 1$.

Dalam kasoskotangen, keluarkan factor $cot^2 x$ dan kemudian gunakan kesamaan $cot^2 x = csc^2 x - 1$.

Contoh 4.6

Tentukan $\int tan^5 x\, dx$.

$$\int tan^5 x\, dx = \int tan^3 x\, tan^2 x\, dx$$

$$\int (tan^3 x\, sec^2) dx - \int tan^3 x$$

$$= \frac{1}{4} tan^4 x - \frac{1}{2} tan^2 x + ln|\cos x| + c$$

Contoh 4.7.

$\int tan^m x\, sec^n x\, dx$ (n genap, m sebarang)

Tentukan $\int tan^{-\frac{3}{2}} x\, sec^4 x\, dx$.

$$\int tan^{-\frac{3}{2}} x\, sec^4 x\, dx$$

$$= \int \left(tan^{-\frac{3}{2}}\right)(1 + tan^2 x) sex^2 x\, dx$$

$$= \int \left(tan^{-\frac{3}{2}}\right) sex^2 x\, dx + \left(1 + tan^{\frac{1}{2}} x\right) sex^2 x\, dx$$

$$= -2\, tan^{-\frac{1}{2}} x + \frac{2}{3} tan^{\frac{2}{3}} + c$$

Contoh 4.8.

$\int \boldsymbol{tan^m x\, sec^n x\, dx}$ (**n ganjil, m sebarang**)

Tentukan $\int tan^3x\, sec^{-\frac{1}{2}}x\, dx$.

$$\int tan^3x\, sec^{-\frac{1}{2}}x\, dx$$
$$= \int (tan^2x)\left(sec^{-\frac{3}{2}}x\right)(\sec x \tan x)dx$$

$$= \int (sec^2x - 1)sec^{-\frac{3}{2}}x\, d(\sec x)$$

$$= \int sec^{\frac{1}{2}}x\, d(\sec x) - \int sec^{-\frac{3}{2}}\, d(\sec x)$$

$$= \frac{2}{3}sec^{\frac{3}{2}}x + 2\ sec^{-\frac{1}{2}}x + c$$

JENIS 4. $\int \mathbf{tan}^m\mathbf{x}\, \mathbf{sec}^n\mathbf{x}\, \mathbf{dx}$ **dan** $\int \mathbf{cot}^m\mathbf{x}\, \mathbf{csc}^n\mathbf{x}\mathbf{dx}$

Untuk m = 1 dan n=0 kita lakukan integrasi sebagai berikut:

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \int -\frac{1}{\cos x} d(\sin x) = -$$

(i) $$ln(\cos x) + c$$

(ii) $$\int \cot x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \ln(\sin x) + c$$

Sedangkan untuk m = 0 dan n = 1 kita lakukan manipulasi integrasi sebagai berikut:

(i) $$\int \sec x \, dx = \int \sec x \left(\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\right) dx$$

$$= \int \frac{sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$$

$$= \int \frac{d(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}$$

$$= \ln(\sec x + \tan x) + c$$

(ii) $$\int \csc x \, dx = -\ln(\csc x + \cot x) + c$$

Untuk atau n = 0 atau m = 0 dapat digunakan rumus reduksi, dengan menggunakan identitas $tan^2 = sec^2x - 1 \,\&\, cot^2x - 1$ didapatkan:

(i) $\int tan^m x\, dx = \int tan^{m-2} x\, tan^2 x\, dx$

$$= \int tan^{m-2} x(sec^2 x - 1)dx$$

$$= \int tan^{m-2} x\, d(\tan x) - \int tan^{m-2} x\, dx$$

$$= \frac{tan^{m-1} x}{m-1} - \int tan^{m-2} x\, dx$$

(ii) $\int cot^m x\, dx = -\frac{cot^{m-1}}{m-1} - \int cot^{m-2} x\, dx$

(iii) $\int sec^n x\, dx = \int sec^{n-2} x\, sec^2 x\, dx$

$$= \int sec^{n-2} x\, d(\tan x)$$

$$= \frac{sec^{n-2}x \tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int sec^{n-2}x \, dx$$

(iv) $\int csc^n x \, dx = -\frac{csc^{n-2}x \cot x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int csc^{n-2}x \, dx$

Untuk m ganjil, maka integral akan mudah diselesaikan bila digunakan bentuk

$d(\sec x) = \sec x \tan x \, dx$ atau $d(\csc x) = -\csc x \cot x \, dx$

dan identitas:

$tan^2 = sec^2 x - 1 \;\&\; cot^2 x - 1$. Sedang untuk m genap akan mudah diselesaikan bila kita reduksi ke dalam suku-suku dari sec x atau csc x.

Contoh 4.9.

a. $\int tan^3 x\, sec^3 dx$

Misal u= sec x. Maka du = sec x tan x dx

$$\int tan^3 x\, sec^3 x\, dx = \int tan^2 x\, sec^2 x (\tan x \sec x) dx$$

$$= \int (sec^2 x - 1) sec^2 x (\tan x \sec x) dx$$

$$= \int (u^2 - 1) u^2 du$$

$$= \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{3}u^3 + c$$

$$= \frac{1}{5}sec^5 - \frac{1}{3}sec^3 + c$$

b. $\int tan^2 x\, sec^4 x\, dx$

Misal u = tan x. Maka du = sec^2x dx

$$\int tan^2x\, sec^4x\, dx = \int tan^2x\, sec^2x\, sec^2x\, dx$$

$$= \int u^2(u^2+1)du$$

$$= \frac{1}{5}u^5 + \frac{1}{3}u^3 + c$$

$$= \frac{1}{5}tan^5 + \frac{1}{3}tan^3 + c$$

JENIS 5 & 6

Integral jenis ini digunakan dalam teori arus bolak-balik, teori perpindahan panas, dan dalam teori-teori yang menggunakan deret Fourier. Untuk menyelesaikan integral tersebut kita gunakan kesamaan.

➢ $\sin mx \cos nx\, dx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)\, x + \sin(m-n)]$

➢ $\sin mx \sin nx = -\frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)]$

➢ $\cos(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)]$

Contoh 4.10.

Tentukan $\int \sin 4x \cos 2x \, dx.$

$$\int \sin 4x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}\int [\sin(4x+2x) + \sin(4x-2x)]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin(4x+2x) + \frac{1}{2}\int \sin(4x-2x)\, dx$$

$$=-\frac{1}{12}cos6x - \frac{1}{4}\cos(2x) + c$$

Contoh 4.11.

Tentukan $\int \sin 6x \sin 2x \, dx$

$$\int \sin 6x \sin 2x \, dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int [\cos(6x + 2x) + \cos(6x - 2x) dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int [\cos(6x + 2x) + \frac{1}{2} \int \cos(6x - 2x) dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int [\cos(8x) \, dx + \frac{1}{2} \int \cos(4x) dx$$

$$= -\frac{1}{16} \sin(8x) + \frac{1}{8} \sin(4x) + c$$

Contoh 4.12.

Tentukan $\int \cos(4x)\cos(2x)\,dx$

$$\int \cos(4x)\cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int [\cos(6x) + \cos(2x)]dx$$

$$= \frac{1}{12}\sin(6x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + c$$

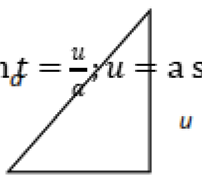
1. Integral Substitusi Trigonometri

Integran dengan bentuk akar sering kita jumpai dalam permasalahan integral, yang mana akan menimbulkan kesulitan untuk menyelesaikan integralnya. Bentuk akar yang sering kita jumpai adalah integran yang memuat bentuk-bentuk

$\sqrt{a^2 - u^2}$, $\sqrt{a^2 + u^2}$ atau $\sqrt{u^2 - a^2}$ dengan a > 0 . Untuk dapat menyelesaikan permasalahan integral yang fungsinya berbentuk akar, maka diperlukan suatu teknik integrasi yaitu dengan substitusi fungsi trigonometri yang bertujuan untuk meniadakan bentuk akar tersebut. Konsep kerja teknik integrasi dengan substitusi fungsi trigonometri adalah meniadakan bentuk akar dari fungsi yang terdapat dalam persoalan integral yang diberikan, setelah itu peubah dari fungsi diganti dengan fungsi trigonometri yang sesuai. Setelah itu barulah bentuk integral fungsi trigonometri dapat diselesaikan dengan menggunakan konsep integral trigonometri.

Integral Memuat Bentuk $\sqrt{a^2 - u^2}$, dengan a > 0

Apabila integran memuat bentuk $\sqrt{a^2 - u^2}$, andaikan bahwa u = a sin (t), dengan a > 0. Kondisi ini dapat dinyatakan pada suatu segitiga siku-siku seperti berikut:



$\sin t = \frac{u}{a}$, $u = a \sin t$

$du = a \cos t \, dt$

$$\sqrt{a^2 - u^2} = \sqrt{a^2 - (a \sin t)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 - (a^2 \sin^2 t)}$$

$$= \sqrt{a^2 cos^2 t}$$

$$= a \cos t \,;\, t \arcsin \left(\frac{u}{a}\right)$$

Contoh 4.13

Tentukan $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}} = \int \frac{dx}{\quad}$$

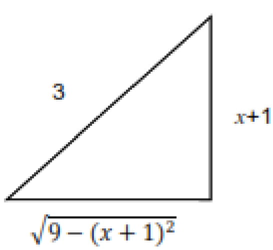
$$\sin u = \frac{x+1}{3}$$

$$3 \sin u = x + 1$$

$$3 \sin u - 1 = x$$

$$3 \cos u \, du = dx$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+1)^2}}$$



$$= \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+1)^2}}$$

$$= \int \frac{3\cos u \, du}{\sqrt{9-(3\sin u \mp 1)^2}}$$

$$= \int \frac{3\cos u \, du}{\sqrt{9-(9sin^2u})}$$

$$= \int \frac{3\cos u}{\sqrt{9(1-sin^2u})}$$

$$= \int \frac{3\cos u \, du}{\sqrt{9cos^2u}}$$

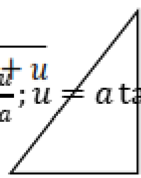
$$= \int \frac{3\cos u}{3\cos u} du$$

$$= \int du$$

$$= u + c \rightarrow \left(arc \sin \frac{x+1}{3} \right) + c$$

Integral Memuat Bentuk $\sqrt{a^2+u^2}$, dengan a > 0

Apabila integran memuat bentuk $\sqrt{a^2+u^2}$, rasionalkan bentuk akar dengan mensubstitusikan u = a tan t. Kondisi ini dapat dinyatakan pada suatu segitiga siku-siku seperti berikut:



$\tan t = \frac{u}{a}; u = a \tan t; \; du = a\, sec^2 t\, dt$

$\sqrt{a^2+u^2} = \sqrt{a^2+(a\tan t)^2}$

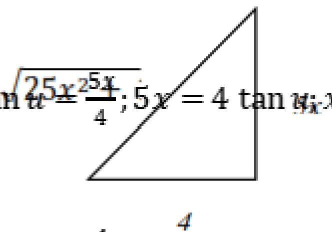
$= \sqrt{a^2(1+\ tan^2 t}$

$= \sqrt{a^2 sec^2 t}$

$$= a \sec t$$

Contoh 4.14

Tentukan $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{25x^2+16}}$



$$\tan u = \frac{5x}{4}; 5x = 4 \tan u; x = \frac{4}{5}\tan u$$

$$dx = \frac{4}{5}\, sec^2 u\, du$$

Sehingga diperoleh:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{25x^2+16}} = \int \frac{\frac{4}{5} sec^2 u\, du}{\left(\frac{4}{5}\right)^2 tan^2 u \sqrt{25\left(\frac{4}{5}\tan u\right)^2 + 6}}$$

$$= \int \frac{\frac{4}{5} sec^2 u \, du}{\left(\frac{16}{25}\right) tan^2 u \sqrt{25\left(\frac{16}{25}\right) tan^2 u + 16}}$$

$$= \int \frac{\frac{4}{5} sec^2 u \, du}{\left(\frac{16}{25}\right) tan^2 u \sqrt{16 tan^2 u + 16}}$$

$$= \int \frac{\frac{4}{5} sec^2 u \, du}{\left(\frac{16}{25}\right) tan^2 u \sqrt{16(tan^2 u + 1)}}$$

$$= \int \frac{\frac{4}{5} sec^2 u \, du}{\left(\frac{16}{25}\right) tan^2 u \sqrt{16 \, sec^2 x}}$$

$$= \int \frac{\frac{4}{5} sec^2 u \, du}{\left(\frac{16}{25}\right) tan^2 u \, 4 \sec u}$$

$$= \int \frac{\frac{4}{5}\frac{1}{cos^2 u}\ du}{\left(\frac{16}{25}\right)\frac{sin^2 u}{cos^2 u} 4 \frac{1}{\cos u}}$$

$$= \int \frac{\frac{4}{5}\cos u\, du}{\left(\frac{4}{5}\right)^2 sin^2 u.4}$$

$$= \int \frac{\cos u\ du}{\frac{4}{5} sin^2 u.4}$$

$$= \int \frac{5 \cos u\, du}{16\ sin^2 u}$$

$$= \frac{5}{16} \int \frac{\cos u}{sin^2 u} du$$

Misal: x = sin u

dx = cos u du

$$= \frac{5}{16} \int \cos u\ sin^{-2} u\ du$$

$$= \frac{5}{16} \int x^{-2}\ du$$

$$=-\frac{5}{16x}+c$$

$$=-\frac{5}{16\sin u}+c$$

$$=-\frac{5}{16\left(\frac{5x}{\sqrt{25x^2+16}}\right)}+c$$

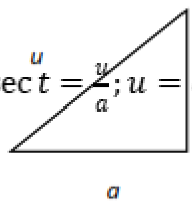
$$=-\frac{\sqrt{25x^2+16}}{16x}+c$$

Keterangan:

$$\sin u=\frac{5x}{\sqrt{25x^2+16}}$$

Integral Memuat Bentuk $\sqrt{u^2 - a^2}$, dengan a > 0

Apabila integran memuat bentuk $\sqrt{u^2 - a^2}$ rasionalkan bentuk akar dengan mensubtitusikan u = a sec t. Kondisi ini dapat dinyatakan pada suatu segitiga siku-siku seperti berikut:



$$\sec t = \frac{u}{a};\ u = a \sec t;\ du = a \sec u \tan u\ du$$

$$\sqrt{u^2 - a^2} = \sqrt{(a \sec t)^2 - a^2}$$

$$= \sqrt{(a^2 sec^2 t) - a^2}$$

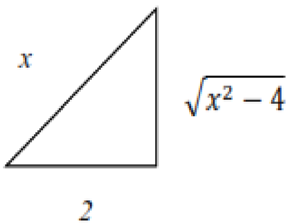
$$= \sqrt{(sec^2 t - 1)a^2}$$

$$= \sqrt{a^2 tan^2 t}$$

$$= a \tan t$$

Contoh 4.15.

Tentukan $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}} dx$



$sec\ u = \frac{x}{2}; x = 2\ sec\ u; dx = 2\ sec\ u\ tan\ u\ du$

Sehingga diperoleh:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}} dx$$

$$= \int \frac{1}{2 \sec u \sqrt{(2 \sec u)^2 - 4}} 2 \sec u \tan u\, du$$

$$= \int \frac{1}{2 \sec u \sqrt{(4sec^2 u) - 4}} 2 \sec u \tan u\, du$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{4(sec^2 u - 1)}} \tan u \, du$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{4tan^2 u}} \tan u \, du$$

$$= \int \frac{1}{2\tan u} \tan u \, du$$

$$= \int \frac{1}{2} du$$

$$= \frac{1}{2} u + c$$

$$= \frac{1}{2} \; arssec \frac{x}{2} + c$$

2. Integral Fungsi Rasional

Menurut definisi, suatu fungsi rasional adalah hasil bagi dua fungsi suku banyak (polinomial), contohnya sebagai berikut.

$$f(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$$

$$g(x) = \frac{2x+2}{x^2-4x+8}$$

$$h(x) = \frac{x^5+2x^3-x+1}{x^3+5x}$$

Apabila pangkat dari pembilang lebih besar atau sama dengan pangkat dari penyebut, maka diperoleh fungsi rasional tak sejati, dan jika pangkat dari penyebut lebih besar dari pembilang fungsi rasional dikatakan sebagai fungsi rasional sejati. Fungsi f dan g

dinamakan fungsi rasional sejati, dapat kita lihat bahwa derajat pembilang kurang dari derajat penyebut. Sebaliknya, fungs h merupakan fungsi rasional tidak sejati. Suatu fungsi rasional tidak sejati dapat ditulis sebagai fungsi rasional sejati. Berikut adalah bentuk sejati dari fungsi h.

$$h(x) = \frac{x^5 + 2x^3 - x + 1}{x^3 + 5x} = \left(x^2 - 3\right) + \frac{14x + 1}{x^3 + 5x}$$

Hasil tersebut diperoleh dengan melakukan pembagian pada polinomial. Selanjutnya akan kita bahas mengenai pengintegralan fungsi rasional sejati. Sebagai contoh awal akan dilakukan pengintegralan untuk fungsi f dan g.

Ada 4 kemungkinan yang muncul dalam fugnsi rasional sejati, yaitu

a. Bentuk Linier Tak Berulang

Apabila fungsi rasional sejati p(x)/q(x), dimana faktor dari penyebut q(x) semuanya linier tidak berulang, yaitu:

$q(x) = (a_1x - b_1)(a_2x - b_2)......(a_nx - b_n)$

Tulislah fungsi rasional menjadi;

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{a_1x - b_1} + \frac{A_2}{a_2x - b_2} + \dots + \frac{A_n}{a_nx - b_n}$$

Sehingga,

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int (\frac{A_1}{a_1 x - b_1} + \frac{A_2}{a_2 x - b_2} + \dots + \frac{A_n}{a_n x - b_n}) dx$$

$$= \frac{A_1}{a_1} ln|a_1 x - b_1| + \frac{A_2}{a_2} ln|a_2 x - b_2| + \dots + \frac{A_n}{a_n} ln|a_n x - b_n| + c$$

dimana konstanta A_1, A_2,...,A_n yang harus ditentukan dengan menggunakan konsep aljabar pecahan.

Contoh 4.16

Tentukan selesaian dari $\int \frac{3x-1}{x^2-x-6} dx$

Penyelesaian:

$\int \frac{3x-1}{x^2-x-6} dx =$

1. $\int \frac{3x-1}{(x-3)(x+2)} dx$; tulislah integran menjadi,

$$\frac{3x-1}{x^2-x-6} = \frac{A}{(3x-3)} + \frac{B}{(x+2)};$$

Dengan A dan B adalah konstanta-konstanta yang harus ditentukan:

$$\frac{3x-1}{x^2-x-6} = \frac{A(x+2)+B(3x-3)}{(3x-3)(x+2)}$$

$$3x-1 = A(x+2) + B(3x-3)$$

$$3x- = Ax + 2A + Bx - 3B$$

$3x - 1 = (A + B)x + 2A - 3B$

Dengan menggunakan metode eliminasi,

$$\begin{aligned} A + B &= 3 \\ 2A - 3B &= -1 \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} \times -3 \\ \times -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} -3A - 3B &= -9 \\ 2A - 3B &= -1 \\ \hline -5A &= -8 \\ A &= \frac{8}{5} \end{aligned} \; -$$

$A + B = 3$

$\frac{8}{5} + B = 3$

$B = 3 - \frac{8}{5} = \frac{7}{5}$

Sehingga diperoleh $A = \frac{8}{5}$, dan $B = \frac{7}{5}$

Jadi, $\int \frac{3x-1}{x^2-x-6} dx = \int \frac{A}{(3x-3)} dx + \int \frac{B}{(x+2)} dx$

$$= \frac{8}{5}\int \frac{1}{(3x-3)} dx + \frac{7}{5}\int \frac{1}{(x+2)} dx$$

$$= \frac{8}{5} ln|x-3| + \frac{7}{5} ln|x+2| + c$$

b. Bentuk Linier Berulang

Apabila fungsi rasional sejati p(x)/q(x), dimana faktor dari penyebut q(x) memuat faktor linier berulang, misalkan $(ax - b)^m$. Tulislah integran yang memuat faktor linier berulang itu menjadi m jumlahan pecahan parsial,

$$\frac{A_m}{(ax-b)^m} + \frac{A_{m-1}}{(ax-b)^{m-1}} + \cdots + \frac{A_1}{(ax-b)}$$

Sehingga,

$$\int \left(\frac{A_m}{(ax-b)^m} + \frac{A_{m-1}}{(ax-b)^{m-1}} + \cdots + \frac{A_1}{(ax-b)}\right) dx$$

$$= \frac{A_m}{a}\frac{(ax-b)^{1-m}}{1-m} + \frac{A_{m-1}}{a}\frac{(ax-b)^{1-(m-1)}}{1-(m-1)} + \cdots + \frac{A_1}{a} ln|ax-b| + c$$

Dengan A_m, A_{m-1}, …, A_1 adalah konstanta-konstanta yang harus ditentukan niainya.

Contoh 4.17

Tentukan selesaian dari $\int \frac{3x^2-8x+13}{x^3+x^2-5x+3}\,dx$

Penyelesaian:

Pandang, $x^3+x^2-5x+3=(x+3)(x-1)^2$,

tulislah integran menjadi,

$$\frac{3x^2-8x+13}{x^3+x^2-5x+3} = \frac{A}{(x+3)}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$\frac{3x^2-8x+13}{x^3+x^2-5x+3} = \frac{A(x-1)^2+B(x+3)(x-1)+C(x+3)}{(x+3)(x-1)^2}$$

Dengan A, B, dan C adalah konstanta-konstanta yang harus ditentukan nilainya.

$$3x^2-8x+13 = A(x-1)^2+B(x+3)(x-1)+C(x+3)$$

$$3x^2-8x+13 = A(x^2-2x+1) + B(x^2-x+3x-3)+Cx+3C$$

$$3x^2 - 8x + 13$$
$$= Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 - Bx$$
$$+ 3Bx - 3B + Cx + 3C$$

$$3x^2 - 8x + 13$$
$$= Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 + 2Bx$$
$$- 3B + Cx + 3C$$

$$3x^2 - 8x + 13$$
$$= (A + B)x^2 + (-2A + 2B + C)x$$
$$+ A - 3B + 3C$$

Dengan menggunakan metode eliminasi:

$$A + B = 3 \;\ldots\ldots(1)$$

$$-2A + 2B + C = -8 \;\ldots\ldots(2)$$

$$A - 3B + 3C = 13 \;\ldots\ldots(3)$$

Eliminasi persamaan (2) dan persamaan (3)

$$\begin{array}{ll} -2A + 2B + C = & \left|\begin{array}{l} \times 3 \\ \times 1 \end{array}\right| \\ A - 3B + 3C = 13 & \end{array} \quad \begin{array}{r} -6A + 6B + 3C = -24 \\ 3B + 3C = 13 \\ \hline -7A + 9B = -37 \ldots (4) \end{array} \; -$$

Eliminasi persamaan (4) dan persamaan (1)

$$\begin{array}{ll} -7A + 9B = -37 & \left|\begin{array}{l} \times 1 \\ \times 9 \end{array}\right| \\ A + B = 3 & \end{array} \quad \begin{array}{r} -7A + 9B = -37 \\ 9A + 9B = 27 \\ \hline -16A = -64 \\ A = 4 \end{array} \; -$$

Karena A = 4, maka diperoleh:

$A + B = 3$

$4 + B = 3$

$B = -1$

Karena A = 4 dan B = -1, maka diperoleh:

$A - 3B + 3C = 13$

$4 - 3(-1) + 3C = 13$

$4 + 3 + 3C = 13$

$3C = 13 - 7$

$3C = 6$

$C = 2$

Sehingga diperoleh A = 4, B = -1 dan C = 2

Jadi

$\int \frac{3x^2 - 8x + 13}{x^3 + x^2 - 5x + 3} dx = \int \frac{A}{(x+3)} dx + \int \frac{B}{(x-1)} dx +$

$\int \frac{C}{(x-1)^2} dx$

$$= \int \frac{4}{(x+3)}\,dx + \int \frac{(-1)}{(x-1)}\,dx + \int \frac{2}{(x-1)^2}\,dx$$

$$= 4\int \frac{dx}{(x+3)} - 1\int \frac{dx}{(x-1)} + 2\int \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$= 4ln|x+3| - ln|x-1| + 2\int \frac{du}{u^2}$$

$$= 4ln|x+3| - ln|x-1| + 2\int u^{-2}\,du$$

$$= 4ln|x+3| - ln|x-1| + 2 - \frac{1}{u} + c$$

$$= 4ln|x+3| - ln|x-1| + \frac{2}{-(x-1)} + c$$

c. Bentuk Kuadrat Tak Berulang

Untuk tiap faktor kuadratik yang tidak dapat difaktorkan lagi atau $ax^2 + bx + c$ yang muncul sekali dalam penyebut pecahan rasional yang dapat dinyatakan sebagai pecahan parsial berbentuk $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$, dimana A dan B konstanta yang harus dicari.

Contoh 4.18

Tentukan selesaian dari $\int \frac{dx}{x^3+x}$

Penyelesaian

$$\int \frac{dx}{x^3+x} = \int \frac{dx}{x(x^2+1)}$$

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \Rightarrow \frac{1}{x^3+x} = \frac{A(x^2+1)+Bx(x)+C(x)}{x(x^2+1)}$$

$$1 = A(x^2+1) + Bx^2 + Cx$$

$$1 = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx$$

$1 = (A + B)x^2 + Cx + A$

Sehingga diperoleh:

$A + B = 0 \; .... (1)$

$C = 0 \; ... (2)$

$A = 1 \; ... (3)$

Karena $A = 1$, maka $1 + B = 0$, sehingga diperoleh $B = -1$

Jadi, $\int \frac{dx}{x^3 + x} = \int \frac{A}{x} dx + \int \frac{Bx + C}{x^2 + 1} dx$

$$= \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{(-1)x + 0}{x^2 + 1} dx$$

$$= ln|x| - \int \frac{x dx}{x^2 + 1}$$

Misal: u = $x^2 + 1$

du = 2x dx

$$= ln|x| - \int \frac{\frac{1}{2} du}{u}$$

$$= ln|x| - \frac{1}{2} \int \frac{du}{u}$$

$$= ln|x| - \frac{1}{2} ln|u|$$

$$= ln|x| - \frac{1}{2} ln|x^2 + 1|$$

d. Bentuk Kuadrat Berulang

Untuk faktor kuadratik yang berulang n kali dengan bentuk $ax^2 + bx + c$ dalam penyebut pada pecahan rasional, ditulis sebagai jumlah dari n pecahan parsial dengan bentuk:

$$\frac{A_1 x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2 x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_n x + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n},$$

dimana A dan B adalah konstanta yang harus dicari.

Contoh 4.19

Tentukan selesaian dari $\int \frac{x^3 - 4x}{(x^2 + 1)^2} dx$

Penyelesaian:

$$\int \frac{x^3 - 4x}{(x^2 + 1)^2} dx = \int \frac{x^3 - 4x}{(x^2 + 1)(x^2 + 1)} dx$$

$$\frac{x^3 - 4x}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax + B}{(x^2+1)} + \frac{Cx + D}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{x^3 - 4x}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax(x^2+1) + B(x^2+1) + Cx + D}{(x^2+1)^2}$$

$$x^3 - 4x = Ax(x^2+1) + B(x^2+1) + Cx + D$$

$$x^3 - 4x = Ax^3 + Ax + Bx^2 + B + Cx + D$$

$$x^3 - 4x = Ax^3 + Bx^2 + (A + C)x + B + D$$

Sehingga diperoleh:

$$A = 1$$

$$B = 0$$

$$A + C = -4$$

$$1 + C = -4$$

$$C = -5$$

$$B + D = 0$$

$$0 + D = 0$$

$$D = 0$$

$$\int \frac{x^3 - 4x}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{x^3 - 4x}{(x^2+1)(x^2+1)} dx$$

$$= \int \frac{(1)x+0}{(x^2+1)} dx + \int \frac{(-5)x+0}{(x^2+1)^2} dx$$

Misal: u = $x^2 + 1$

du = 2x dx

$$= \int \frac{x}{(x^2+1)} dx + \int \frac{-5x}{(x^2+1)^2} dx$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2} du}{u} - 5 \int \frac{\frac{1}{2} du}{u^2}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} - 5\left(\frac{1}{2}\right) \int u^{-2} du$$

$$= \frac{1}{2} ln|u| - \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{u}\right) + c$$

$$= \frac{1}{2} ln|x^2+1| + \frac{5}{2u} + c$$

$$= \frac{1}{2} ln|x^2+1| + \frac{5}{2(x^2+1)} + c$$

Latihan Soal Bab 4

1. Selesaikanlah integral parsial berikut:

   a. $\int x\, e^{x}\, dx$ b. $\int x\, e^{3x}\, dx$ c. $\int x \sin 3x\, dx$

   d. $\int x^{2}\, e^{x}\, dx$ e. $\int x^{2} \cos x\, dx$

2. Selesaikanlah integral trigonometri berikut:

   a. $\int \sin^{4} x\, dx$ b. $\int \cos^{5} x\, dx$ c. $\int \tan^{3} y\, dy$

   d. $\int \sin^{\frac{1}{2}} x \cos^{3} x\, dx$ e. $\int \tan^{5} x \sec^{-\frac{3}{2}} x\, dx$ f. $\int \cot^{5} x \csc^{3} x\, dx$

   g. $\int \sin 4y \cos 5y\, dy$ h. $\int \cos y \cos 4y\, dy$ i. $\int \sin 3y \sin y\, dy$

3. Selesaikanlah integral subtitusi trigonometri berikut:

   a. $\int \frac{dx}{x^{2}\sqrt{4-x^{2}}}$ b. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^{2}-4}}$ c. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^{2}-a^{2}}}$

d. $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}\, dx$ e. $\int \frac{2x-1}{x^2+6x+18}\, dx$

4. Selesaikanlah integral fungsi rasional berikut:

a. $\int \frac{dx}{x^2-4}$ b. $\int \frac{x^2\, dx}{x^2+x-6}$ c. $\int \frac{6x^2-2x-1}{4x^2-x}\, dx$

d. $\int \frac{x+1}{(x-3)^2}$ e. $\int \frac{x^2-4x}{(x+1)^2}\, dx$ f. $\int \frac{x-1}{x(x^2+1)}\, dx$

BAB 5 INTEGRAL TAK WAJAR

1. Integral Tak Wajar: Batas Tak Hingga

Integral tak wajar (improper) merupakan suatu fungsi integral yang tidak memenuhi asumsi dari integral tentu. Sehingga kita harus mengenali dengan cermat dari integral tak wajar tersebut. Kita harus mengingat kembali definisi dari integral tentu, yaitu:

Dalam definisi integral tentu $\int_a^b f(x)dx$ terdapat dua asumsi :

(1) Selang pengintegralannya [a, b] merupakan selang terhingga (bernilai).

(2) Fungsi integrannya (yang diintegralkan) merupakan fungsi terbatas.

Apabila dalam pelaksanaannya, ada kalanya salah satu atau kedua asumsi ini tidak dipenuhi, dengan demikian kita berhadapan dengan integral tak wajar. Pada sub bab ini kita akan menjabarkan terlebih dahulu integral tak wajar dengan batas tak terhingga, misalnya integral berikut ini :

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx, \quad \int_{-\infty}^{-1} xe^{-x^2}dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^3}dx$$

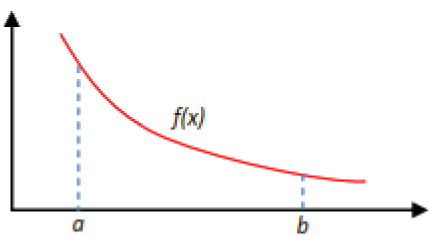
Bagaimana caranya kita menghitung $\int_a^\infty f(x)dx$

Kita pahami kembali bahwa untuk setiap b > a ; kita dapat menghitung integral tentu tersebut, yaitu :

$$\int_{a}^{b} f(x)dx$$

Integral tak wajar untuk

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx$$



Gambar 5. 1

Dapat juga kita defisinikan sebagai limit dari integral

tentu di atas, dimana untuk $b \rightarrow \infty$.

Maka :

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$$

Bila limit ini ada.

Jika limit di ruas kanan ada dan berhingga, maka integral tak wajar disebut konvergen, dan bila limit di ruas kanan tidak ada maka disebut divergen.

Contoh 5.1

Hitung $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$

Penyelesaian:

Untuk setiap b > 0, maka dapat kita tulis ;

$$\int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx$$

Kita ingat kembali bahwa:

$$y = tan^{-1} x$$

$$y = arc\tan x$$

$$\tan y = x$$

$$\frac{d}{dx}\tan y = \frac{d}{dx}x$$

$$\frac{d}{dx}\tan y = \frac{dx}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\tan y = 1$$

Karena: $\tan y = sec^2 y dy$

$$sec^2 y\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{sec^2 y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + tan^2 y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Maka:

$$\int_0^b \frac{1}{1 + x^2}dx = tan^{-1}x \,\Big|_0^b$$

$$= \tan^{-1} b - \tan^{-1} 0$$

$$= \tan^{-1} b - 0$$

$$= \tan^{-1} b$$

Jadi:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \to \infty} \int_{0}^{b} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \lim_{b \to \infty} \tan^{-1} b$$

$$= \tan^{-1} \infty$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

Dapat disimpulkan bahwa integral tak wajarnya disebut konvergen (mempunyai nilai).

Contoh 5.2

Hitung $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x} dx$

Penyelesaian:

Untuk b > 1, maka :

$$\int_1^b \frac{1}{x}dx = \ln x$$

Maka:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{1}{x}dx$$

$$= \lim_{b \to \infty} (\ln x) \Big|_1^b$$

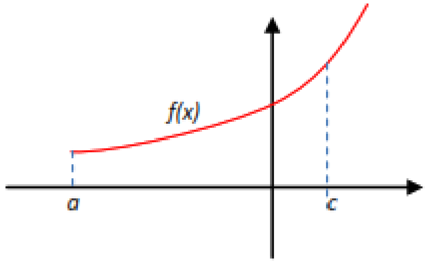
$$= \lim_{b \to \infty} (\ln b) - \lim_{b \to \infty} (\ln 1)$$

$$= \infty$$

Dapat disimpulkan bahwa integral tak wajarnya disebut divergen (tidak mempunyai nilai).

Definis Integral tak wajar untuk

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$$



Dapat juga kita defisinikan sebagai limit dari integral tentu di atas, dimana untuk $a \to -\infty$.

Maka :

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty,} \int_{a}^{c} f(x)dx$$

Bila limit ini ada.

Jika limit di ruas kanan ada dan berhingga, maka integral tak wajar disebut konvergen, dan jika limit di ruas kanan tidak ada maka disebut divergen.

Contoh 5.3

Hitung $\int_{-\infty}^{-1} xe^{-x^2}\,dx$

Penyelesaian:

Ada 3 tahapan dalam menyelesaikan integral tak wajar tersebut yaitu (i) melalui subsitusi pada integral tak tentu, (ii) selanjutnya diselesaikan dengan intregral tentu dengan interval [a, -1], (iii) selesaikan dengan limit.

(i) Subtitusi $\int xe^{-x^2}\,dx$

Misal:

$u = x^2$

$du = 2x\ dx$

$\frac{du}{2} = x\ dx$

Maka:

$$\int xe^{-x^2} dx = \int e^{-u} \left(\frac{du}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \int e^{-u} du$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-u} + c$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-x^2} + c$$

(ii) Untuk a < -1, maka :

$$\int_{a}^{-1} xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_{a}^{-1}$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-((-1)^2)} - \left(-\frac{1}{2} e^{-a^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-1} - \left(-\frac{1}{2}e^{-a^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}e^{-a^2}$$

$$= \frac{1}{2}e^{-a^2} - \frac{1}{2}e^{-1}$$

$$= \frac{1}{2}(e^{-a^2} - e^{-1})$$

(iii) Selesaikan dengan limit

$$\int_{-\infty}^{-1} xe^{-x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{-1} xe^{-x^2}\,dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}\left(e^{-a^2} - e^{-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(e^{-a^2} - e^{-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(0 - \frac{1}{e}\right)$$

$$= -\frac{1}{2e}$$

Definis Integral tak wajar untuk

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

Maka:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$$

Bila kedua integral di ruas kanan konvergen.

Contoh 5.4

Hitung $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$, bila konvergen

Penyelesaian:

Maka kita akan selesaikan dengan 2 tahapan, yaitu :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Untuk

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Telah kita selesaikan pada contoh 5.1 di atas yaitu :

$$\lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} tan^{-1}x \,\Big|_0^b$$

$$= \lim_{b \to \infty} (tan^{-1} b - 0)$$

$$= tan^{-1} \infty$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

Selanjutnya:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \to \infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \lim_{b \to \infty} tan^{-1} x \Big|_a^0$$

$$= \lim_{b \to \infty} (0 - tan^{-1} a)$$

$$= - \lim_{b \to \infty} (tan^{-1} a)$$

$$= -\left(tan^{-1}(-\infty)\right)$$

$$= -\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

Maka:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$$

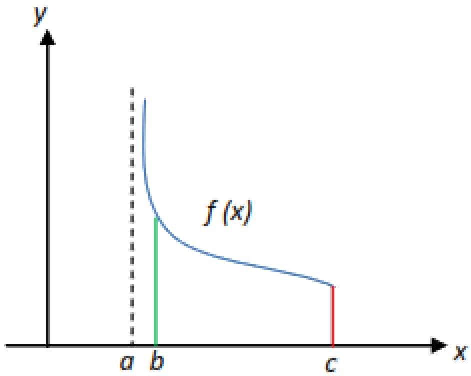
2. Integral Tak Wajar: Integran Tak Hingga

Mengenali dan menghitung integral tak wajar dengan integran tak terhingga, misalnya pada integral berikut ini.

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx, \int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}, \int_{0}^{3} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

Sekilas kita perhatikan bahwa integral tersebut mirip dengan integral tentu, namun kalau kita cermati maka akan kita pahami bahwa integral tersebut adalah integral tak wajar dengan integran tak terhingga. Pada integral pertama, integran tak terhingga berada diujung kiri yaitu pada saat 0 karena menghasilkan ∞. Sedangkan pada integral kedua, integran tak terhingga diujung kanan yaitu pada saat 2 dimana akan menghasilkan ∞. Untuk yang ketiga yang membuat integral tak wajar adalah diantara selang [0, 2] yaitu pada angka 1 akan menghasilkan ∞.

Integral Tak Wajar $\int_a^c f(x)$, dengan f tak terhingga di a



Gambar 5. 2 grafik $\int_a^c f(x)$

$$\int_a^c f(x) = \lim_{b \to a^+} \int_a^c f(x)$$

Bila limit ini ada.

Contoh 5.5

Hitung $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$, bila konvergen.

Penyelesain:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b \to 0^+} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

Untuk tahap pertama kita selesaikan dengan integral tak tentu pada fungsi tersebut, yaitu :

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{x^{1/2}} dx$$

$$= \int x^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{-\frac{1}{2} + 1} x^{-\frac{1}{2}+1} + c$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}} x^{1/2} + c$$

$$= 2x^{1/2} + c$$

$$= 2\sqrt{x} + c$$

Untuk setiap b > 0 , dengan b < 1, dapat kita hitung;

$$\int_b^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}\Big|_b^1$$

$$= 2\sqrt{1} - 2\sqrt{b}$$

$$= 2 - 2\sqrt{b}$$

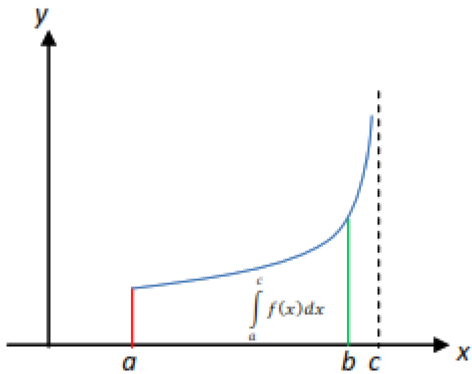
Jadi:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b \to 0^+} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$= \lim_{b \to 0^+} \left(2 - 2\sqrt{b}\right)$$

$$= 2$$

Integral Tak Wajar $\int_a^c f(x)$, dengan f tak terhingga di c



Gambar 5. 3 grafik $\int_a^c \boldsymbol{f(x)}$

$$\int_a^c f(x) = \lim_{b \to a^+} \int_a^c f(x)$$

Bila limit ini ada dan terhingga maka integral tersebut dikatakan konvergen, sedangkan yang lainnya disebut divergen.

Contoh 5.6

Jika memungkinkan hitunglah integral tak wajar berikut ini.

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

Integran ini menuju tak terhingga didekat x = 1.

Penyelesaian:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{b\to 1^-} \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

Untuk tahap pertama kita selesaikan dengan integral tak tentu pada fungsi tersebut, yaitu :

$$\int \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \int \frac{1}{(x-1)^{2/3}}dx$$

$$= \int (x-1)^{-2/3}dx$$

Kita selesaikan integral ini dengan metode substitusi.

Misal :

$u = x - 1$

$\frac{du}{dx} = 1$

$du = dx$

Maka:

$$\int (x-1)^{-2/3}dx = \int u^{-2/3}du$$

$$= \frac{1}{-\frac{2}{3}+1} u^{-\frac{2}{3}+1} + c$$

$$= \frac{1}{-\frac{2}{3}+\frac{3}{3}} u^{-\frac{2}{3}+\frac{3}{3}} + c$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{3}} u^{1/3} + c$$

$$= 3u^{1/3} + c$$

$$= 3(x-1)^{1/3} + c$$

Setelah itu kita selesaikan integral awal, yaitu :

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{b\to 1^-} \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

$$= \lim_{b\to 1^-} 3(x-1)^{1/3} \Big|_0^b$$

$$= \lim_{b\to 1^-} \{3(b-1)^{1/3} - 3(0-1)^{1/3}\}$$

$$= \lim_{b\to 1^-} \{3(b-1)^{1/3} - 3(-1)^{1/3}\}$$

$$= \lim_{b \to 1^-} \{3(b-1)^{1/3} - 3(-1)\}$$

$$= \lim_{b \to 1^-} \{3(b-1)^{1/3} + 3\}$$

$$= \{3(1-1)^{1/3} + 3\}$$

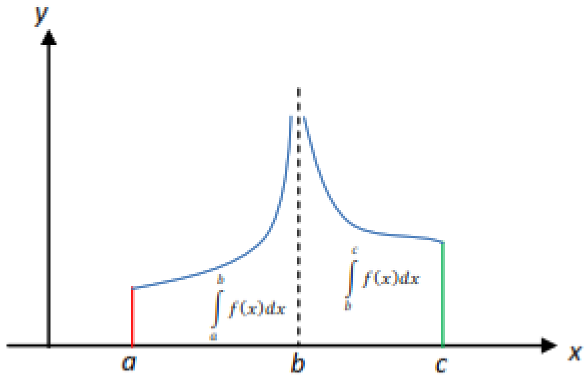
$$= \{3(0)^{1/3} + 3\}$$

$$= \{0 + 3\}$$

$$= 3$$

Integral ini tak wajar dikarenakan $\frac{1}{(x-1)^{2/3}}$ tak terbatas didekat x = 1.

Integral Tak Wajar $\int_a^c f(x)\,dx$, dengan f tak terhingga di b



Gambar 5. 4 grafik $\int_a^c \boldsymbol{f(x)\ dx}$

ndaikan f kontinu pada [a, b], kecuali di c dengan a<c<b. Andaikan $\lim_{x \to c} |f(x)| = \infty$.

Maka:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)dx$$

Bila limit ini ada dan terhingga maka integral tersebut dikatakan konvergen, sedangkan yang lainnya disebut divergen.

Contoh 5.6

Jika memungkinkan hitunglah integral tak wajar berikut ini.

$$\int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

Integran ini menuju tak terhingga didekat x = 1.

Penyelesaian:

$$\int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^4 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

Untuk tahap pertama kita selesaikan dengan integral tak tentu pada fungsi dari masing-masing intergral tersebut. Apabila nanti hasil dari salah satu fungsi tersebut divergen maka tidak perlu diselesaikan lagi karena hasilnya sudah pasti divergen, namun apabila hasilnya konvergen maka kita akan menemukan hasilnya.

$$\int \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \int \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx$$

$$= \int (x-1)^{-2/3}\,dx$$

Kita selesaikan integral ini dengan metode substitusi.

Misal :

$u = x - 1$

$$\frac{du}{dx} = 1$$

$$du = dx$$

Maka:

$$\int (x-1)^{-2/3} dx = \int u^{-2/3} du$$

$$= \frac{1}{-\frac{2}{3}+1} u^{-\frac{2}{3}+1} + c$$

$$= \frac{1}{-\frac{2}{3}+\frac{3}{3}} u^{-\frac{2}{3}+\frac{3}{3}} + c$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{3}} u^{1/3} + c$$

$$= 3u^{1/3} + c$$

$$= 3(x-1)^{1/3} + c$$

Maka pada integral:

$$\int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^4 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

$$= \lim_{b \to 1^-} \int_0^b \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \lim_{b \to 1^+} \int_b^4 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

(i) Kita hitung dahulu integral

$$\lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{b\to 1^-} 3(x-1)^{1/3} \Big|_0^b$$

$$= \lim_{b\to 1^-} \{3(b-1)^{1/3} - 3(0-1)^{1/3}\}$$

$$= \lim_{b\to 1^-} \{3(b-1)^{1/3} - 3(-1)^{1/3}\}$$

$$= \lim_{b\to 1^-} \{3(b-1)^{1/3} - 3(-1)\}$$

$$= \lim_{b\to 1^-} \{3(b-1)^{1/3} + 3\}$$

$$= \{3(1-1)^{1/3} + 3\}$$

$$= \{3(0)^{1/3} + 3\}$$

$$= \{0 + 3\}$$

$$= 3$$

(ii) Selanjutnya kita hitung untuk integral

$$\lim_{b\to1^+}\int_b^4 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{b\to1^+} 3(x-1)^{1/3}\Big|_b^4$$

$$= 3\lim_{b\to1^+}(x-1)^{1/3}\Big|_b^4$$

$$= 3\lim_{b\to1^+}\{(4-1)^{1/3}$$

$$-(b-1)^{1/3}\}$$

$$= 3\lim_{b\to1^+}\{(3)^{1/3}-(b-1)^{1/3}\}$$

$$= 3\{(3)^{1/3}-(1-1)^{1/3}\}$$

$$= 3\{(3)^{1/3}-(0)^{1/3}\}$$

$$= 3\{1{,}44-0$$

$$= 4{,}32$$

Maka didapat akhir perhitungan adalah :

$$\int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = 3+4{,}32 \approx 7{,}32$$

Latihan Soal Bab 5

1. Hitung integral tak wajar batas tak hingga berikut, jika mungkin:

   a. $\int_{1}^{\infty} e^{x}\, dx$

   b. $\int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x^5}$

   c. $\int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{(1-x)^{\frac{2}{3}}}$

   d. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3x\, dx}{(3x^2+2)^3}$

   e. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(4x^2+4)}}$

2. Hitung integral tak wajar integran tak hingga berikut, jika mungkin:

   a. $\int_{3}^{7} \frac{dx}{\sqrt{x-3}}$

   b. $\int_{0}^{9} \frac{dx}{\sqrt{9-x}}$

c. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

d. $\int_{-2}^{+2} \frac{dx}{x^3}$

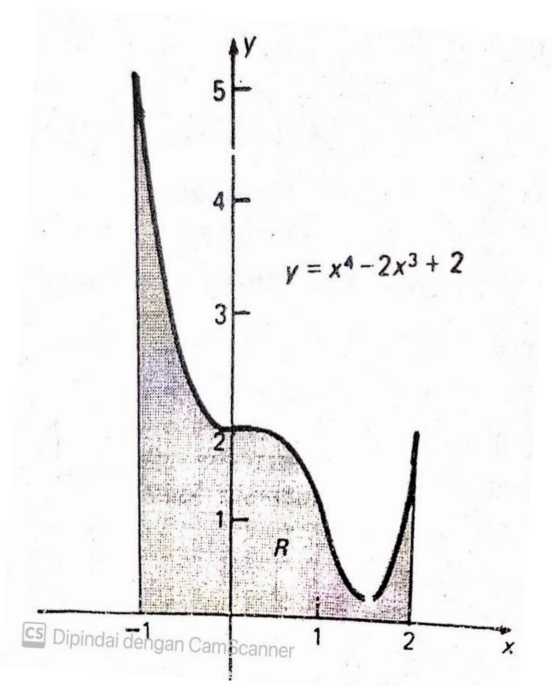
e. $\int_2^4 \frac{dx}{(3-x)^{\frac{2}{3}}}$

BAB 6 PENGGUNAAN INTEGRAL

1. Luas Daerah Bidang Rata

Pembahasan singkat tentang luas di dalam pasal 5.4 diperlukan untuk memberikan dasar tentang definisi integral tentu. Setelah konsep ini benar-benar dipahami, kita berbalik arah, dan menggunakan integral tentu untuk menghitung luas daerah-daerah yang bentuknya rumit.

Contoh 6.1



Tentukan luas daerah R di bawah kurva $y = x^4 - 2x^3 + 2$ antara $x = -1$ dan $x = 2$.

Penyelesaian

Daerah R

diperlihatkan pada Gambar 2

$$A(R) = \int_{-1}^{2} (x^4 - 2x^3 + 2)dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{5} - \frac{x^4}{2} + 2x\right]_{-1}^{2}$$

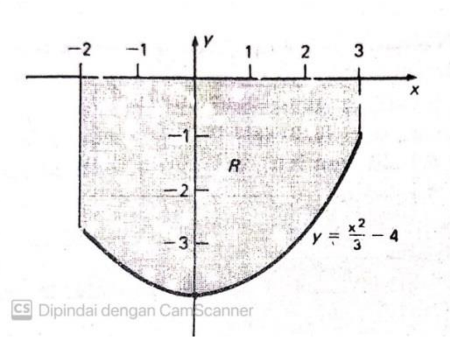
$$= \left(\frac{32}{5} - \frac{16}{2} + 4\right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} - 2\right)$$

$$= \frac{51}{10}$$

Daerah di bawah sumbu x luas di nyatakan oleh bilangan yang tak negative. Apa bila

Gambar 6. 1

grafik $y = f(x)$ terletak di bawah sumbu-x, maka $\int_a^b f(x)dx$ adalah bilangan yang negative. Sehingga tak dapat melukiskan suatu luas. Akan tetapi bilangan itu adalah negative untuk luas daerah yang dibatasi oleh $y = f(x), x = a, x = b$ dan $y = 0$.



Gambar 6. 2

Contoh 6.2

Tentukan luas daerah R yang dibatasi oleh

$y = {x^3}/_{3} - 4,$ sumbu x, $x = -2$ dan $x = 3.$

Penyelesaian

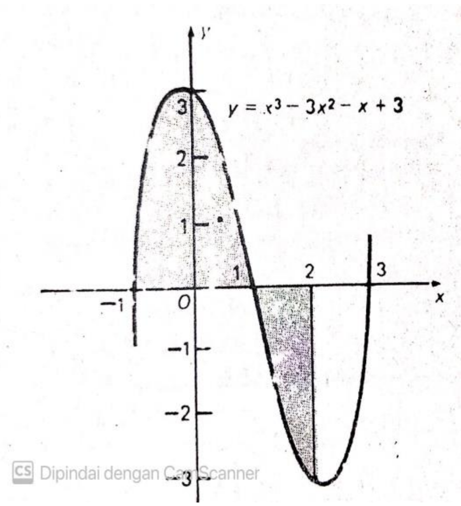
Daerah R diperlihatkan pada gambar di samping

$$A(R) = -\int_{-2}^{3}\left(\frac{x^2}{3} - 4\right)dx = \int_{-2}^{3}\left(-\frac{x^2}{3} + 4\right)dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{9} + 4x\right]_{-2}^{3} = \left(-\frac{27}{9} + 12\right) - \left(\frac{8}{9} - 8\right) = \frac{145}{9}$$

Contoh 6.3

Tentukan luas daerah R yang dibatasi oleh $y = x^3 - 2x^2 - x + 3$, ruas sumbu x antara $x = -1$ dan $x = 2$, dan oleh garis $x = 2$



Gambar 6. 3

Penyelesaian

Daerah R adalah daerah yang diarsir pada gambar disamping. Perhatikan bahwa ada sebagian di atas sumbu x da nada yang di bawah sumbu x. luas masing-masing bagian ini harus dihitung secara terpisah. Mudah dihitung bahwa kurva di atas memotong sumbu x di -1,1 dan 3 sehingga

$$A(R) = \int_{-1}^{1} (x^3 - 3x^2 - x + 3)dx$$

$$- \int_{1}^{2} (x^3 - 3x^2 - x + 3)dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{1}^{2}$$

$$= 4 - \left(-\frac{7}{4}\right) = \frac{23}{4}$$

Soal 1

Dalam soal 1-18, gambarlah daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva yang samaannya diketahui. Tunjuklah sebuah persegi panjang dalam suatu jalur potongan, aproksimasilah luasnya, susunlah integral yang sesuai dan kemudian hitunglah luas daerah yang bersangkutan

1. $y = 4 - 4x^2, y = 0$, antara $x = 0$ dan $x = 3$.
2. $y = 4x - x^2, y = 0$, antara $x = 1$ dan $x = 3$.
3. $y = x^2 - 2x - 3, y = 0$, antara $x = 0$ dan $x = 2$
4. $y = \frac{1}{2}(x^2 - 10), y = 0,$ antara

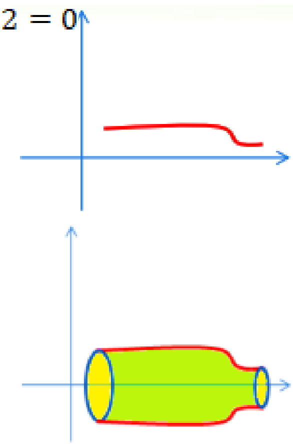
   $x = -2$ dan $x = 3$
5. $y = x^3, y = 0, x = -1, x = 2$
6. $y = \sqrt[3]{x}, y = 0, x = -1, x = 8$
7. $y = \sqrt{x - 4}, y = 0, x = 8$
8. $y = x^2 - 4x + 3, x - y - 1 = 0$
9. $y = x^2, y = x + 2$
10. $y = 2\sqrt{x}, y = 2x - 4, x = 0$
11. $y = x^2 - 4x, y = -x^2$
12. $y = x^2 - 2, y = 2x^2 + x - 4$
13. $x = 6y - y^2, x = 0$
14. $x = -y^2 + y + 2, x = 0$

15. $x = 4 \ldots y^2, x + y - 2 = 0$

16. $x = y^2 - 3y, x - y + 3 = 0$

17. $y^2 - 2x = 0, y^2 + 4x - 12 = 0$

18. $x = y^4, x = 2 - y$



Gambar 6. 4 grafik volume benda putar

2. Volume Benda Putar

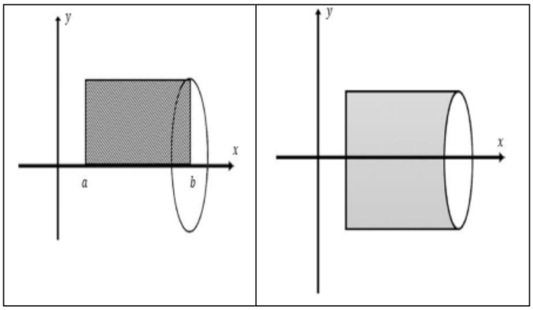
Volume benda putar adalah volume benda ruang yang terbentuk dari hasil pemutaran suatu daerah di bidang datar terhadap garis tertentu (sumbu rotasi). Sebagai ilustrasi, botol di samping dapat dipandang sebagai benda putar jika kurva di atasnya diputar menurut garis horisontal. Sehingga volume botol dapat ditentukan dengan menggunakan aplikasi integral.

Pada pokok bahasan ini akan dipelajari penggunaan integral untuk menghitung volume benda putar dengan metode cakaram dan metode cincin. Penjelasan lebih lanjut dapat dilihat pada penjelsan berikut.

Metode Cakram

Metode cakram merupakan salah satu pendekatan yang dihasilkan dari bentuk partisi yang digunakan. Mengapa dinamakan metode cakram, lebih disebabkan oleh bentuk partisi yang dihasilkan berbentuk cakram.Secara matematis, menentukan volume benda putar dengan menggunakan metode cakram dapat dinyatakan sebagai berikut:

Misalnya garis tersebut adalah sumbu-x, dan andaikan luas penampang di x adalah $A(x)$ dengan $a \leq x \leq b$ dan $h = \Delta x = [a, b]$. r merupakan jari-jari, dan jari-jari yang dimaksud disini merupakan sebuah fungsi konstan, sehingga membentuk sebuah persegi panjang dengan interval $a \leq x \leq b$. Jika persegi panjang tersebut diputar terhadap sumbu –x sejauh $360°$, maka akan diperoleh sebuah tabung. Untuk lebih jelasnya, perhatikan ilustrasi gambar di bawah ini.



Gambar 6. 5 Metode cakram

Berdasarkan gambar di atas, dapat dinyatakan aturan untuk menentukan volume benda putar dengan menggunakan metode cakram yaitu:

$$V = \int_a^b A(x)dx = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Selanjutnya agar dapat lebih memahami implementasi dan penggunaan metode cakram dalam penyelesaian permasalahan yang diberikan, perhatikan contoh berikut ini

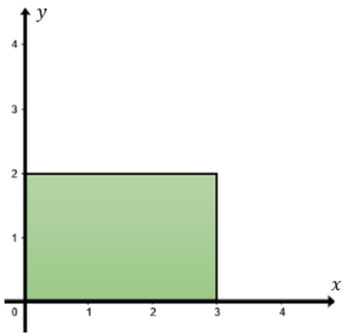
Contoh 6.4

Sebuah daerah, misal kita namakan R terbentuk dari kurva $y = 2$, $x = 0$, dan $x = 3$ yang diputar mengelilingi sumbu x sejauh $360°$.

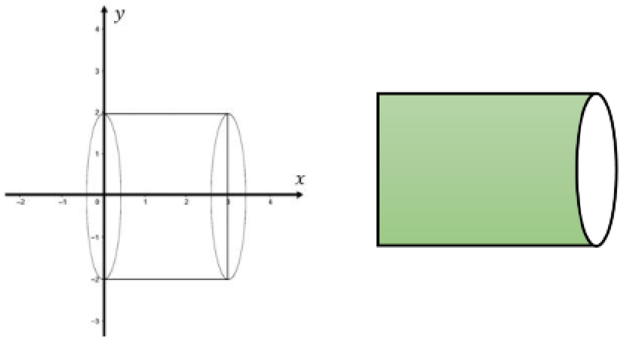
a. Buatlah sketsa dari daerah tersebut!
b. Tentukan konsep apa yang dapat digunakan untuk menghitung volume dari daerah R apabila diputar $360°$ terhadap sumbu x, kemudian terhadap sumbu y!
c. Selanjutnya jika dinyatakan volume daerah R yang diputar $360°$ terhadap sumbu x sama dengan volume daerah R yang diputar $360°$ terhadap sumbu y. Tentukan apakah pernyataan tersebut bernilai benar?
   - Jika ya, nyatakan proses untuk menemukan berapa volumenya!
   - Jika tidak, nyatakan alasannya. Kemudian nyatakan proses untuk menemukan berapa volumenya!

Penyelesaian:

a. Sketsa daerah R yang dibatasi oleh kurva $y = 2$, $x = 0$, dan $x = 3$.



b. Jika gambar pada point a diputar mengelilingi sumbu x, maka akan dibentuk sebuah tabung seperti gambar di bawah ini. Hal yang sama akan terbentuk, jika gambar pada point a diputar mengelilingi sumbu y, maka akan terbentuk sebuah tabung juga. Dari pemaparan tersebut, dapat kita nyatakan untuk menentukan volume dari daerah R, baik yang dipuat mengelilingi sumbu x atau sumbu y, dapat menggunakan metode cakram.



Gambar 6. 6 Grafik metode cakram

c. Volume daerah R yang mengelilingi sumbu x dapat ditentukan dengan aturan:

$$V = \int_0^3 A(x)dx = \pi \int_0^3 (f(x))^2 dx$$

$$= \pi \int_0^3 (2)^2 dx$$

$$= 4x\pi \Big|_0^3$$

$= 12\pi \approx 37{,}7$..............selesaian 1

Sedangkan volume untuk daerah R yang mengeliling sumbu y, dapat ditentukan dengan aturan:

$$V = \int_0^2 A(y)dy = \pi \int_0^2 (f(y))^2 dy$$

$$= \pi \int_0^2 (3)^2 dx$$

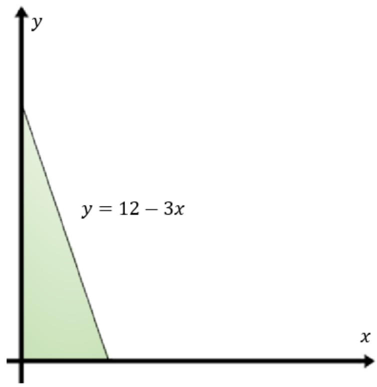
$$= 9y\pi \Big|_0^2$$

$= 18\pi \approx 56{,}52$...............selesaian 2

Berdasarkan selesaian 1 dan selesaian 2 tersebut, dapat dinyatakan bahwa volume dari daerah R yang diputar mengelilingi sumbu x tidak sama dengan volume dari daerah
yang diputar mengelilingi sumbu y.

Contoh 6.5

Perhatikan gambar di bawah ini!



Gambar 6. 7

Dinyatakan bahwa volume dari daerah yang diarsir apabila di putar terhadap sumbu x dan sumbu y adalah sama. Tentukan, apakah pernyataan tersebut bernilai benar?

-Jika ya, nyatakan proses untuk menemukan berapa volumenya!

-Jika tidak, nyatakan alasannya. Kemudian nyatakan proses untuk menemukan berapa volumenya!

Penyelesaian:

Jika diputar mengelilingi sumbu x, maka volumenya:

$$V = \int_0^4 A(x)dx = \pi \int_0^4 (f(x))^2 dx$$

$$= \pi \int_0^4 (12 - 3x)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^4 (144 - 72x + 9x^2) dx$$

$$= 144x - 36x^2 + 3x^3 \Big|_0^4 \pi$$

$= 192\pi \approx 603{,}43$..............selesaian 1

Jika diputar mengelilingi sumbu y, maka volumenya:

$$V = \int_0^{12} A(y)dy = \pi \int_0^{12} (g(y))^2 dy$$

$$= \pi \int_0^{12} (4 - \frac{1}{3}x)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^{12} (16 - \frac{8}{3}x + \frac{1}{9}x^2) dx$$

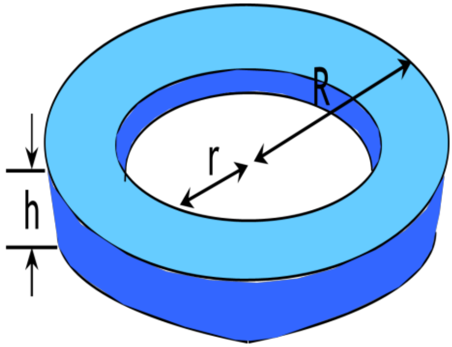
$$= 16x - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{27}x^3 \Big|_0^{12} \pi$$

$= 192\pi \approx 603{,}43$...............selesaian 2

Berdasarkan selesaian 1 dan selesaian 2 tersebut, dapat dinyatakan bahwa volume dari daerah R yang diputar mengelilingi sumbu x tidak sama dengan volume dari daerah yang diputar mengelilingi sumbu y.

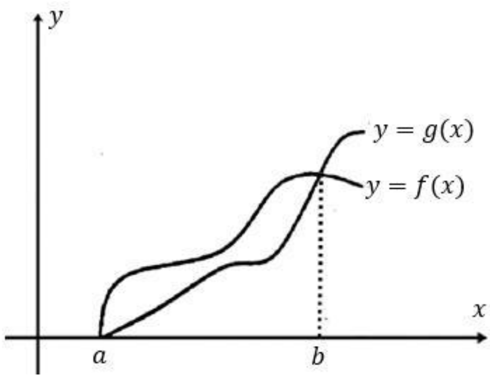
Metode Cincin

Metode cincin merupakan salah satu pendekatan yang dihasilkan dari bentuk partisi yang digunakan. Mengapa dinamakan metode cincin, lebih disebabkan oleh bentuk partisi yang dihasilkan berbentuk cincin. Perhatikan gambar berikut.



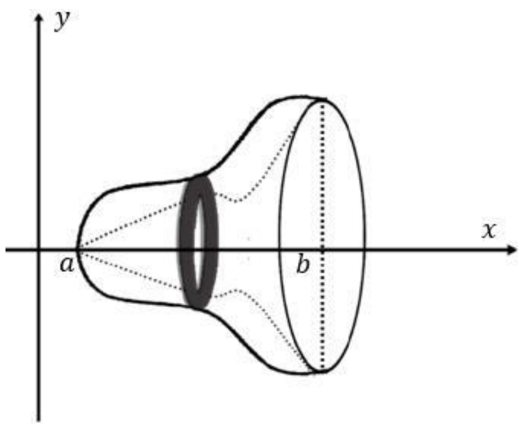
Gambar 6. 8 Metode cincin

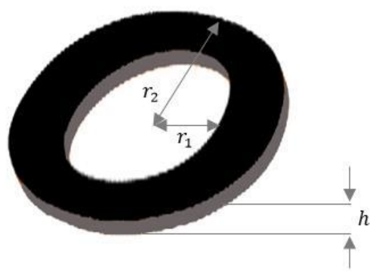
Dengan pendekatan matematis, penjabaran dari metode cincin dapat dinyatakan sebagai berikut:



Gambar 6. 9 Grafik metode cincin

Pada gambar di atas, diketahui bahwa terdapat dua buah kurva yang saling berpotongan di suatu titik. Kedua kurva tersebut, membentuk sebuah daerah, dimana jika daerah yang terbentuk tersebut diputar mengelilingi sumbu x, maka akan diperoleh sebuah bangun ruang, yang terdapat dua jari – jari. Jari – jari pertama diperoleh dari kurva grafik fungsi (x) dan jari – jari kedua dari kurva grafik fungsi (x). Untuk lebih jelas, perhatikan gambar di bawah ini





Gambar 6. 10 Metode cincin

Luas penampang di x adalah (x), dan (x) terbentuk oleh dua jari-jari yang memiliki fungsi (x) dan $g(x)$, dengan $a \le x \le b$ dan $h = \Delta x = [a, b]$, maka:

$$V = \pi({r_2}^2 - {r_1}^2)h$$

Jadi, volume benda putar yang dibatasi $y = (x)$, $y = (x)$, $x = a$, dan $x = b$ adalah:

$$V = \int_a^b A(x)dx = \pi \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2]\,dx$$

Sebaliknya, volume benda putar yang dibatasi $x = (y)$, $x = (y)$, $y = a$ dan $y = b$ adalah:

$$V = \int_a^b A(y)dy = \pi \int_a^b [(p(y))^2 - (q(xy]\,dy$$

Untuk lebih memahami aplikasi, implementasi dan kegunaan dari penyelesaian dengan menggunakan metode cincin, perhatikan dan pahami contoh di bawah ini.

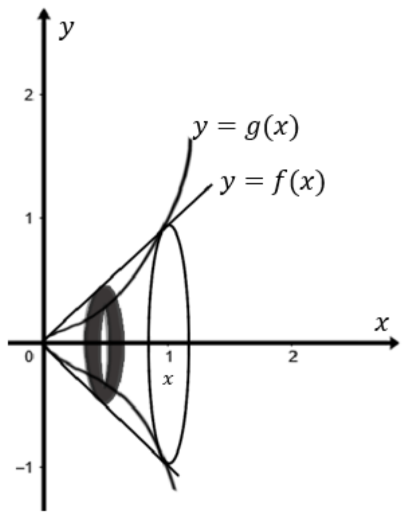
Contoh 6.5

Sebuah daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$, $x = 0$, dan $y =$ yang diputar mengelilingi sumbu x dan y.

a. Buatlah sketsa dari daerah tersebut!
b. Tentukan konsep apa yang dapat digunakan untuk menghitung volume dari daerah tersebut apabila diputar $360°$ terhadap sumbu x, kemudian terhadap sumbu y!
c. Selanjutnya jika dinyatakan volume daerah yang diputar $360°$ terhadap sumbu x sama dengan volume daerah yang diputar $360°$ terhadap sumbu y. Tentukan apakah pernyataan tersebut bernilai benar?
    - Jika ya, nyatakan proses untuk menemukan berapa volumenya!
    - Jika tidak, nyatakan alasannya. Kemudian nyatakan proses untuk menemukan berapa volumenya!

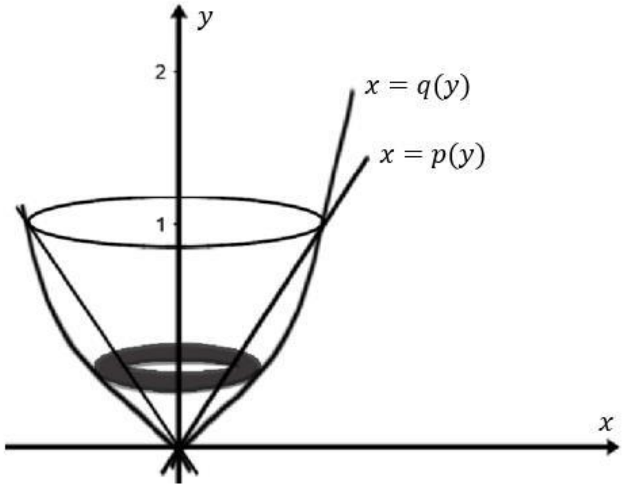
Penyelesaian:

a. Untuk daerah yang diputar mengelilingi sumbu x, digambarkan sebagai berikut:



Gambar 6. 11

Untuk daerah yang diputar mengelilingi sumbu y, digambarkan sebagai berikut:



Gambar 6. 12

b. Untuk menentukan volume dari benda putar terhadap sumbu x, kita dapat menggunakan metode cincin, dengan alasan, daerah benda putar tersebut dibentuk dari dua buah kurva, dengan aturan:

$$V = \int_a^b A(x)dx = \pi \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2]\, dx$$

Sedangkan untuk volume benda putar yang berputar terhadap sumbu y, dapat ditentukan dengan aturan:

$$V = \int_a^b A(y)dy = \pi \int_a^b [(p(y))^2 - (q(xy]\, dy$$

c. Volume jika diputar terhadap sumbu x

$$V = \int_0^1 A(x)dx = \pi \int_0^1 [(f(x))^2 - (g(x))^2]\,dx$$

$$= \pi \int_0^1 [(x)^2 - (x^2)^2]dx$$

$$= \pi \int_0^1 [(x^2 - x^4]dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 \Big|_0^1 \pi$$

$$= \frac{2}{15}\pi \approx 0{,}42$$

Volume benda putar terhadap sumbu y:

$$V = \int_a^1 A(y)dy = \pi \int_0^1 [(q(y))^2 - (p(y))^2]\,dy$$

$$= \pi \int_0^1 [(\sqrt{y})^2 - (y^2)]dy$$

$$= \pi \int_0^1 [(y - y^2]dx$$

$$= \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 \Big|_0^1 \pi$$

$$= \frac{1}{6}\pi \approx 0{,}52$$

3. Panjang Busur Suatu Kurva

Jika fungsi f dan f' kontinu pada selang tutup [a,b], maka panjang busur kurva y = f(x) dari titik A (a,f(a)) ke titik B (b,f(b)) ditentukan oleh:

$$p = \int_{b}^{b} \sqrt{1 + (f(x))^2}\ dy = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + (dy + dx)^2}\, dx$$

Jika fungsi F dan turunananya F' kontinu pada selang tertutup [c,d] maka panjang busur kurva $x = (f(y))$ dari titik F(F(c),c) ke titik B(F(d),d) ditentukan oleh:

$$p = \int_{c}^{d} \sqrt{1 + (F(y))^2}\ dy$$

$$= \int_{c}^{d} \sqrt{1 + (dx + dy)^2}\, dy$$

Contoh 6.5

Tentukan panjang busur kurva $y = x^{2/3}$ dari titik (1,1) ke titik (8,4).

Penyelesaian:

Cara 1:

$y = x^{2/3}$, maka $f'(x) = \frac{2}{3x^{-1/3}} = \frac{2}{3x^{1/3}}$

$$p = \int_1^8 \sqrt{1 + \left(\frac{2}{3x^{1/3}}\right)^2}\ dx$$

$$= \int_1^8 \sqrt{1 + \frac{4}{9x^{2/3}}}\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^8 \frac{\sqrt{9x^{2/3} + 4}}{x^{1/3}}\ dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^8 (9x^{2/3} + 4)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{3}}\ dx$$

$$= \frac{1}{8}\int_1^8 (9x^{2/3} + 4)^{\frac{1}{2}}\ d\left(9x^{2/3} + 4\right)$$

$$= \frac{1}{18}\frac{(9x^{2/3} + 4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_1^8$$

$$= \frac{1}{18}\left(\frac{(9.8^{\frac{2}{3}}+4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{(9.1^{\frac{2}{3}}+4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{27}(40^{\frac{3}{2}} - 13^{\frac{3}{2}}) \approx 7{,}6$$

Cara 2:

$y = x^{2/3}$, maka, x> 0, maka x = $y^{1/2}$

$\mathrm{F(y)} = \mathrm{y}^{2/3}$, maka $\mathrm{F(y)} = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}$

$$\mathrm{P} = \int_1^4 \sqrt{1 + (\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}})^2}\ dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^4 \sqrt{4+9y}\ dy$$

$$= \frac{1}{18}\int_1^4 (4+9y)^{\frac{1}{2}}\ d(4+9y)$$

$$= \frac{1}{27}(40^{\frac{3}{2}} - 13^{\frac{3}{2}}) \approx 7{,}6$$

Jika sebuah kurva ditentukan oleh persamaan-persamaan $x = f(t), y = g(t)$,

$a \leq x \leq b$, dengan turunan f' dan g kontinu pada selang tutup [a, b] sedangkan $f'(t)$ dan $g'(t)$ tidak bersama-sama nol di selang (a, b), maka panjang kurva dalam selang [a, b] adalah:

$$p = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\, dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)} dt$$

Contoh 6.6

Tentukan keliling lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$

Penyelesaian:

Persamaan lingkaran dalam bentuk parameter adalah:

$x = a \cos t, y = a \sin t,\ 0 \leq t \leq 2\pi,$ maka

$\frac{dx}{dt} = -a \sin t, \frac{dy}{dx} = a \cos t$

Keliling p $= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a\, cost\ t)^2}\ dt$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t)}\ dt$$

$$= \int_0^{2\pi} a\ dt$$

$$= at \Big|_0^{2\pi}$$

$$= 2\pi a$$

Latihan Soal Bab 6

1. Hitunglah luas daerah D yang dibatasi oleh:

   a. Kurva $y = 4 - \frac{1}{3}x^2,\ y = 0,\ x = 0,$ dan $x = 3$

   b. Kurva

      $y = x^2 - 2x - 3,\ y = 0, x = 0,$ dan $x = 2$

   c. Kurva $y = 4x - x^2, y = 0, x = 0,$ dan $x = 3$

   d. Kurva $y = x^2 + 4x + 3,$ dan $x - y - 1$

   e. Kurva $y = x^2 - 4x,$ dan $x = -x^2$

2. Hitung volume benda putar yang terjadi jika daerah D yang dibatasi oleh kurva:

   a. $y = \frac{1}{4}x^2, x = 4,$ dan $y = 0$ diputar

      mengelilingi sumbu x

   b. $y^2 = 4x, y = x$ diputar mengelilingi sumbu

      x.

c. $y^2 = \frac{1}{x}, x = 1, x = 4, y = 0$ diputar mengelilingi sumbu x.

d. $x = y^2, x = 1, x = 0,\ y = 2$ diputar mengelilingi sumbu y.

e. $x = \frac{2}{y},\ y = 1,\ x = 0,\ y = 6$ diputar mengelilingi sumbu y.

f. $x = \sqrt{y}, y = 4, x = 0,$ diputar mengelilingi sumbu x.

3. Hitunglah panjang busur dari:

a. Kurva $y = 2x^{\frac{3}{2}}$ antara $x = \frac{1}{3}$ dan $x = 7$

b. Kurva $y = \left(4x - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ antara $x = 1$ dan $x = 8$

c. Kurva $30xy^3 - y^8 = 15$ antara $y = 1$ dan $y = 2$

d. Kurva $3x - 4y + 6 = 0$ antara $y = 0$ dan

$y = 2$

e. Kurva $x = t^3, y = t^2, 0 \leq t \leq 4$

f.Kurva $x = 3 \sin t, y = 3 \cos t - 3,\ 0 \leq t \leq 2\pi t$

DAFTAR PUSTAKA

Cipta, H. (2020). *Kalkulus integral*.

Kalkulus, T. D. (2018). *Kalkulus 2*.

Lisani, L. (n.d.). *Matematika Dasar*.

Lumbantoruan, J. H. (2019). *Buku Integral Tak-Tentu*.

Meilasari, V., & Handayani, R. (2019). *Kalkulus Integral: Teknik Pengintegralan*. Universitas Muhammadiyah Kotabumi.

Murdiyanto, T. (n.d.). *Teknik Pengintegralan*. 1–10.

Muslimin, A. (2003). *Kalkulus II*. Makassar: FMIPA UNM Makassar

Muzakir, U. (2018). *Kalkulus II*. Bandar Publishing Banda Aceh.

Purcell, E. J., & Varberg, D. (1994). *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 1*. Erlangga.

Rizki, N. A. (2018). *Kalkulus II*.

Subanar, S. (n.d.). *Integral Fungsi Eksponen, Fungsi Trigonometri, Fungsi Logaritma*. 1–48.

Sujiran, S. (2017). *Kalkulus II*. IKIP PGRI Bojonegoro.

Sunismi, S. (2018). *Kalkulus II* (A. H. Fathani & M. Baidawi (eds.)). Universitas Malang.

Toheri, T. (2015). *Kalkulus Integral* (p. 161).

Umam, A. khairul. (2021). *Kalkulus 2*. Universitas Billfah.

Zetriuslita, Z., & Ariawan, R. (2022). *Buku Ajar Kalkulus Integral*. UIR PRESS Universitas Islam Riau.